(فصل ۸) تخمین متوسط مربع

۱–۸ مقدمه

در این فصل مسأله تخمین مقدار فرآیند تصادفی $S(t)$ در یک لحظهٔ معین از زمان بر حسب مقادیر (داده‌ها) فرآیند دیگری مانند $X(\xi)$ که به ازاء جمیع مقادیر ξ در بازهٔ $a \le \xi \le b$ به طول محدود یا نامحدود مشخص شده است، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در مورد دیجیتال، راه حلّ مسأله در واقع کاربرد مستقیم اصل تعامد است.

در مورد آنالوگ، تخمین خطی $\hat{S}(t)$ مربوط به $S(t)$ به صورت مجموع نبوده و به شکل انتگرال زیر است

$$\hat{S}(t) \triangleq \hat{E}\{S(t)/X(\xi), a \le \xi \le b\} = \int_a^b h(\alpha)X(\alpha)d\alpha \qquad (۸\text{-}۱)$$

و هدف تعیین $h(\alpha)$ به نحوی است که خطای MS حداقل گردد .

$$P = E\{[S(t)-\hat{S}(t)]^2\} = E\{[S(t)-\int_a^b h(\alpha)X(\alpha)d\alpha]^2\} \qquad (۸\text{-}۲)$$

تابع $h(\alpha)$ شامل تعداد غیر قابل شمارشی از مجهول‌ها، یعنی مقادیر آن به ازاء هر α در بازهٔ (a,b) می‌باشد . برای تعیین $h(\alpha)$ از تعمیم اصل تعامد به صورت زیر استفاده می‌کنیم .

قضیه

P یا خطای MS تخمین فرآیند $S(t)$ توسط انتگرال رابطهٔ (۱-۸) هنگامی حداقل خواهد بودکه داده های $X(\xi)$ بر خطای $S(t)-\hat{S}(t)$ متعامد باشد؛

$$E\{[S(t)-\int_a^b h(\alpha)X(\alpha)d\alpha]X(\xi)\}=0 \qquad a\le\xi\le b \qquad (۸-۳)$$

یا معادلاً اگر $h(\alpha)$، جواب معادلهٔ انتگرال زیر باشد، خطای MS تخمین مذکور حداقل خواهد شد .

$$R_{sx}(t,\xi)=\int_a^b h(\alpha)R_{xx}(\alpha,\xi)d\alpha \qquad a\le\xi\le b \qquad (۸-۴)$$

به منظور اثبات از روش مبتنی بر تقریب انتگرال در (۱-۸) توسط مجموع Riemann آن استفاده خواهیم کرد. بازهٔ (a,b) را به m قطعه $(\alpha_k,\alpha_k+\Delta\alpha)$ تقسیم کرده و می‌توان نوشت

$$\hat{S}(t)\simeq\sum_{k=1}^{m}h(\alpha_k)X(\alpha_k)\,\Delta\alpha \qquad \Delta\alpha=\frac{b-a}{m}$$

با اعمال رابطهٔ (۴-۳۶) به ازاء $\alpha_k=h(\alpha_k)\Delta\alpha$ ، نتیجه می‌گیریم که خطای MS یا P هنگامی حداقل است که

$$E\{[S(t)-\sum_{k=1}^{m}h(\alpha_k)X(\alpha_k)\,\Delta\alpha]X(\xi_j)\}=0 \qquad 1\le j\le m$$

که در آن ξ_j نقطه‌ای در بازهٔ $(\alpha_j,\alpha_j+\Delta\alpha)$ می‌باشد.

اصل تعامد فوق به سیستم معادلات زیر منجر می‌شود

$$R_{sx}(t,\xi_j)=\sum_{k=1}^{m} h(\alpha_k)R_{xx}(\alpha_k,\xi_j)\,\Delta\alpha \qquad j=1,\dots,m \qquad (\text{۸-۵})$$

معادله انتگرال (۸-۴) در واقع حدّ رابطهٔ (۸-۵) به ازاء $\Delta\alpha\rightarrow 0$ است .
با استناد به رابطهٔ (۴-۳۸) می‌توان نتیجه گرفت که خطای LMS تخمین
$S(t)$ توسط انتگرال در (۸-۱) برابرست با

$$P=E\{[S(t)-\int_a^b h(\alpha)X(\alpha)d\alpha]S(t)\}=$$

$$=R_{ss}(0)-\int_a^b h(\alpha)R_{sx}(t,\alpha)d\alpha \qquad (\text{۸-۶})$$

به طور کلی، معادلهٔ انتگرالی (۸-۴) را می‌توان فقط به طریق عددی حل نمود .
در حقیقت، اگر به متغیر ξ مقادیر ξ_i را تخصیص داده و انتگرال را با
مجموع تقریب زنیم به سیستم معادلات (۸-۵) خواهیم رسید .
در این فصل موارد خاص مختلف را که به جواب‌های مشخص
منجر می‌شوند در نظر می‌گیریم .
تمام فرآیندهای مورد بررسی WSS و حقیقی فرض می‌شوند
مگر آن که خلاف آن به صراحت ذکر گردد.
در این بررسی از اصطلاحات و واژه های زیر استفاده خواهد شد .
اگر زمان t در رابطهٔ (۸-۱) در داخل بازهٔ داده‌ها (a,b) قرار داشته باشد،
در آن صورت تخمین $\hat{S}(t)$ از $S(t)$ ، هموارسازی (Smoothing)
نامیده خواهد شد .

اگر زمان t در خارج این بازه قرار داشته و $X(t)=S(t)$ باشد (عدم وجود نویز)، آن گاه $\hat{S}(t)$ پیش‌بینی کننده $S(t)$ می‌باشد.
اگر $t>b$ باشد در آن صورت $\hat{S}(t)$ پیش‌بینی کنندهٔ پیشرو (Forward Predictor) است و اگر $t<a$ باشد در آن صورت $\hat{S}(t)$ پیش‌بینی کننده پس رو (Backward Predictor) خواهد بود.
اگر t بیرون بازهٔ داده ها قرار داشته و $X(t)\neq S(t)$ باشد در آن صورت تخمین را فیلترینگ و پیش‌بینی می‌نامند .
در این بخش، تعدادی از موارد سادهٔ تخمین شامل تعداد محدودی از داده‌ها را بررسی می‌نماییم و در پایان مسأله هموارسازی را که در آن داده‌های $X(\xi)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ در دسترس هستند معرفی می‌کنیم.
در این حالت پاسخ معادله انتگرالی (۴–۸) به آسانی برحسب تبدیل‌های فوریه به دست می‌آید

پیش بینی

می‌خواهیم مقدار آتی $S(t+\lambda)$ فرآیند ایستان $S(t)$ را برحسب مقدار گذشتهٔ آن تعیین کنیم.

$$\hat{S}(t+\lambda)=\hat{E}\{S(t+\lambda)/S(t)\}=aS(t)$$

با توجه به اصل تعامد می‌توان نوشت

$$E\{[S(t+\lambda)-aS(t)]\,S(t)\}=0 \quad , \quad a=\frac{R(\lambda)}{R(0)}$$

$$P=E\{[S(t+\lambda)-aS(t)]\,S(t+\lambda)\}=R(0)-aR(\lambda)$$

مورد خاص :

اگر $R(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}$ باشد در آن صورت $a=e^{-\alpha\lambda}$ خواهد بود .
در این حالت، تفاضل $S(t+\lambda)-aS(t)$ بر $S(t-\xi)$ به ازاء تمام مقادیر $\xi\geq 0$ متعامد است .

$$E\{[S(t+\lambda)-aS(t)]\,S(t-\xi)\}=$$
$$R(\lambda+\xi)-aR(\xi)=Ae^{-\alpha(\lambda+\xi)}-Ae^{-\alpha\lambda}e^{-\alpha\xi}=0$$

این نتیجه نشان می‌دهد که $aS(t)$ تخمین $S(t+\lambda)$ برحسب تمام گذشته آن است .
چنین فرآیندی را فرآیند مارکوف مرتبهٔ اول به مفهوم ضعیف نامند.

اکنون تخمین $S(t+\lambda)$ را بر حسب $S(t)$ و $S'(t)$ تعیین می‌کنیم

$$\hat{S}(t+\lambda)=a_1S(t)+a_2S'(t)$$

بنا به اصل تعامد، داریم

$$S(t+\lambda)-\hat{S}(t+\lambda)\perp S(t),S'(t)$$

با استفاده از تساوی‌های

$$R'(0)=0 \quad , R_{SS'}(\tau)=-R'(\tau) \quad , R_{S'S'}(\tau)=-R''(\tau)$$

$$a_1=R(\lambda)/R(0) \quad , \quad a_2=R'(\lambda)/R''(0)$$

و

$$P=E\{[S(t+\lambda)-a_1S(t)-a_2S'(t)]S(t+\lambda)\}$$
$$=R(0)-a_1R(\lambda)+a_2R'(\lambda)$$

اگر λ کوچک باشد، آن گاه

$$R(\lambda)\simeq R(0) \quad , \quad R'(\lambda)\simeq R'(0)+R''(0)\lambda\simeq R''(0)\lambda$$

$$a_1\simeq 1 \quad , \quad a_2\simeq\lambda \quad , \hat{S}(t+\lambda)\simeq S(t)+\lambda S'(t)$$

فیلترینگ

می‌خواهیم مقدار فعلی فرآیند $S(t)$ را برحسب مقدار فعلی فرآیند دیگری مانند $X(t)$ تعیین کنیم

$$\hat{S}(t)=\hat{E}\{S(t)/X(t)\}=aX(t)$$

با توجه به اصل تعامد می‌توان نوشت

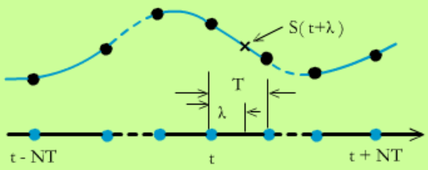
$$E\{[S(t)-aX(t)]X(t)\}=0 \quad , \quad a=R_{sx}(0)/R_{xx}(0)$$

$$P=E\{[S(t)-aX(t)]S(t)\}=R_{ss}(0)-aR_{sx}(0)$$

میان یابی

اکنون می‌خواهیم مقدار $S(t+\lambda)$ از فرآیند $S(t)$ را در نقطهٔ $t+\lambda$
در بازهٔ $(t,t+T)$ برحسب ۲N+۱ نمونه $S(t+kT)$ که به t
نزدیکترین هستند، به دست آوریم (شکل ۱–۸)

$$\hat{S}(t+\lambda)=\sum_{k=-N}^{N} a_k S(t+kT) \qquad 0<\lambda<T \qquad (۸–۷)$$



شکل ۱–۸

اصل تعامد را به کار برده و داریم

$$E\left\{\left[S(t+\lambda)-\sum_{k=-N}^{N} a_k S(t+kT)\right]S(t+nT)\right\}=0 \qquad |n|\le N$$

و در نتیجه

$$\sum_{k=-N}^{N} a_k R(kT-nT)=R(\lambda-nT) \qquad -N\le n\le N \qquad (۸–۸)$$

این دستگاه معادلات شامل ۲N+۱ معادله بوده و پاسخ‌های آن
۲N+۱ مجهول a_k خواهد بود.
خطای تخمین و مقدار MS آن یعنی P عبارتند از

$$\varepsilon_N(t)=S(t+\lambda)-\sum_{k=-N}^{N} a_k S(t+kT) \qquad (۸–۹)$$

$$P=E\{\varepsilon_N(t)S(t+\lambda)\}$$
$$=R(\circ)-\sum_{k=-N}^{N}a_kR(\lambda-kT) \qquad (۸-۱۰)$$

نکته قابل توجه در این بررسی آن است که میان‌یابی را می‌توان به عنوان تقریب یقینی تلقی و تفسیر کرد.

خطای $\varepsilon_N(t)$ را می‌توان خروجی سیستم (فیلتر خطا)

$$E_N(\omega)=e^{j\omega\lambda}-\sum_{k=-N}^{N}a_ke^{jkT\omega}$$

با ورودی $S(t)$ در نظر گرفت. اگر طیف توان $S(t)$ را با $S(\omega)$ نشان دهیم می‌توان نوشت

$$P=E\{\varepsilon_N^2(t)\}=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\left|e^{j\omega\lambda}-\sum_{k=-N}^{N}a_k e^{jkT\omega}\right|^2 d\omega \qquad (۸-۱۱)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که حداقل‌سازی P معادل است با مسأله یقینی‌حداقل‌سازی متوسط وزن دار مربع خطای تقریب تابع نمائی $e^{j\omega\lambda}$ با چند جمله ای‌های مثلثاتی (سری فوریه بریده شده)

مسأله دیگر تخمین انتگرال

$$Z = \int_a^b S(t)dt$$

فرآیند $S(t)$ بر حسب $N+1$ نمونه $S(nT)$ می‌باشد .

$$\hat{Z} = a_0 S(0) + a_1 S(T) + \dots + a_N S(NT)$$

$$T = \frac{b}{N}$$

با اعمال اصل تعامد می‌توان نوشت

$$E\{[\int_a^b S(t)dt - \hat{Z}]S(kT)\} = 0 \qquad 0 \le k \le N$$

بنابراین

$$\int_a^b R(t-kT)dt = a_0 R(kt) + \dots + a_N R(kT-NT) \quad 0 \le k \le N$$

دستگاه معادلات فوق شامل $N+1$ معادله بوده و پاسخ‌های آن در واقع ضریب a_k را به ما می‌دهد.

هموارسازی

می‌خواهیم مقدار فعلی فرآیند $S(t)$ را بر حسب مقادیر $X(\xi)$ از مجموع

$$X(t)=S(t)+\gamma(t)$$

که به ازاء جمیع مقادیر ξ از $-\infty$ تا $+\infty$ در دست و معلوم است،
تخمین بزنیم. پس تخمین مذکور عبارت است از

$$\hat{S}(t)=\hat{E}\{S(t)/X(\xi), -\infty<\xi<\infty\}$$

این تخمین را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\hat{S}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)X(t-\alpha)d\alpha \qquad (۸-۱۲)$$

در این تعریف و رابطه، $h(\alpha)$ مستقل از t بوده و $\hat{S}(t)$ به عنوان خروجی
یک مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان و غیر علّی با ورودی $X(t)$
و پاسخ ضربه $h(t)$ در نظر گرفته می‌شود.
مسأله در واقع تعیین $h(t)$ است.
بدیهی است که

$$S(t)-\hat{S}(t) \perp X(\xi)$$ به ازاء جمیع مقادیر ξ

با تغییر متغیر $\xi=t-\tau$ می‌توان نوشت

$$E\{[S(t)-\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)X(t-\alpha)d\alpha]X(t-\tau)\}=0$$

به ازاء جمیع مقادیر τ

و پس از ساده‌سازی رابطهٔ فوق داریم

$$R_{sx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)R_{xx}(\tau-\alpha)d\alpha \qquad (۸-۱۳)$$

به ازاء جمیع مقادیر τ

پس برای تعیین $h(t)$ باید معادله انتگرالی فوق را حل کنیم.
این معادله را می‌توان به آسانی حل کرد چون این معادله
به ازاء تمام مقادیر τ صادق بوده و انتگرال در واقع
کانوولوشن $h(\tau)$ با $R_{xx}(\tau)$ است.
با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین این معادله می‌توان نوشت

$$S_{sx}(\omega)=H(\omega)\,S_{xx}(\omega) \quad , \quad H(\omega)=\frac{S_{sx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} \qquad (۸-۱۴)$$

سیستم حاصل را فیلتر وینر غیرعلّی می‌نامند .
خطای تخمین P , MS برابراست با

$$\begin{aligned} P&=E\{[S(t)-\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)X(t-\alpha)\,d\alpha]S(t)\} \\ &=R_{ss}(0)-\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)R_{sx}(\alpha)d\alpha \qquad (۸-۱۵) \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[S_{ss}(\omega)-H^{*}(\omega)\,S_{xx}(\omega)]d\omega \end{aligned}$$

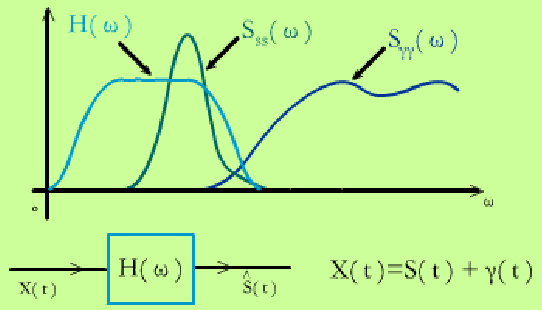
اگر سیگنال $S(t)$ و نویز $\gamma(t)$ متعامد باشند، آن گاه

$$S_{sx}(\omega)=S_{ss}(\omega) \quad , \quad S_{xx}(\omega)=S_{ss}(\omega)+S_{\gamma\gamma}(\omega)$$

بنابراین شکل (۲-۸)

$$H(\omega)=\frac{S_{ss}(\omega)}{S_{ss}(\omega)+S_{\gamma\gamma}(\omega)} \qquad (۸-۱۶)$$

$$P=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{ss}(\omega)\,S_{\gamma\gamma}(\omega)}{S_{ss}(\omega)+S_{\gamma\gamma}(\omega)}\,d\omega$$



شکل ۲-۸

اگر طیف‌های $S_{ss}(\omega)$, $S_{\gamma\gamma}(\omega)$ هم پوشانی نداشته باشند، آن گاه، $H(\omega)=۱$ در باند سیگنال بوده و $H(\omega)=۰$ در باند نویز خواهد بود. در این حالت، $P=۰$ می‌باشد.

مثال ۱-۸

اگر

$$S_{ss}(\omega)=\frac{N_{\circ}}{\alpha^{۲}+\omega^{۲}} \quad , \quad S_{\gamma\gamma}(\omega)=N \quad , \quad S_{s\gamma}(\omega)=۰$$

در آن صورت بنا به رابطهٔ (۱۶-۸) می‌توان نوشت

$$H(\omega)=\frac{N_{\circ}}{N_{\circ}+N(\alpha^{۲}+\omega^{۲})} \quad , \quad h(t)=\frac{N_{\circ}}{۲\beta N}e^{-\beta|t|}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \frac{N_0}{N}$$

و

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{N_0}{2\beta}$$

فرآیندهای گسسته زمان

تخمین غیر علّی $\hat{S}[n]$ فرآیند گسسته زمان برحسب داده های

$$X[n] = S[n] + \gamma[n]$$

خروجی

$$\hat{S}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, X[n-k]$$

سیستم غیر علّی خطی تغییر ناپذیر با زمان با ورودی $X[n]$ و پاسخ ضربه $h[n]$ می‌باشد. بنا به اصل تعامد می‌توان نوشت:

$$E\{(S[n] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, X[n-k])\, X[n-m]\} = 0 \ , \ \text{به ازاء جمیع مقادیر } m$$

پس

$$R_{sx}[m]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,R_{xx}[m-k] \quad \text{به ازاء تمام مقادیر } m \qquad (۸-۱۷)$$

با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین رابطهٔ فوق داریم

$$H(z)=\frac{S_{sx}[z]}{S_{xx}[z]} \qquad (۸-۱۸)$$

خطای MS حاصله برابراست با

$$P=E\{[S[n]-\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,X[n-k]]\,S[n]\}$$

$$=R_{ss}(0)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\,R_{sx}[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[S_{ss}(\omega)-H(e^{-j\omega T})S_{xx}(\omega)]\,d\omega$$

مثال ۲-۸

فرض کنید که $S[n]$ فرآیند AR مرتبه اول و $\gamma[n]$ نویز سفید متعامد بر $S[n]$ می‌باشد

$$S_{ss}(z)=\frac{N_0}{(1-az^{-1})(1-az)} \quad , \quad S_{\gamma\gamma}(z)=N \quad , \quad S_{s\gamma}(z)=0$$

در این مورد،

$$S_{xx}(z)=S_{ss}(z)+N=\frac{aN(1-bz^{-1})(1-bz)}{b(1-az^{-1})(1-az)}$$

که در آن

$$0<b<a<1 \quad , \quad b+b^{-1}=a+a^{-1}+\frac{N_0}{\alpha N}$$

بنابراین

$$H(z)=\frac{bN_0}{aN(1-bz^{-1})(1-bz)}\ ,\quad h[n]=C\,b^{|n|}\ ,\ C=\frac{bN_0}{aN(1-b^2)}$$

$$P=\frac{N_0}{(1-a^2)}\left[1-C\sum_{k=-\infty}^{\infty}(ab)^{|k|}\right]=\frac{bN_0}{a(1-b^2)}$$

۲–۸ پیش بینی

پیش‌بینی در واقع تخمین مقدار آتی $S(t+\lambda)$ فرآیند $S(t)$ بر حسب گذشته آن $S(t-\tau)$ ، $\tau>0$ می‌باشد.

این مسأله را می‌توان متشکل از سه بخش تلقی کرد :

گذشته (داده ها)در بازه $(-\infty,t)$ معلوم است ؛ گذشته در بازه $(t-T,t)$ به مدت محدود T معلوم و در دست است و در بخش سوم ، گذشته (داده ها) در بازه $(0,t)$ به مدت متغیر t معلوم و شناخته شده است. هر سه بخش را فقط در مورد فرآیندهای دیجیتال بررسی خواهیم کرد.

بررسی پیش‌بینی کننده‌های آنالوگ محدود به بخش اول خواهد بود .

در مورد دیجیتال، آسانتر است که مقدار فعلی $S[n]$ فرآیند مفروض را بر حسب گذشتهٔ آن $S[n-k]$, $k\geq r$ پیش بینی کرد.

گذشته نامحدود

بررسی را از تخمین فرآیند $S[n]$ بر حسب گذشتهٔ کامل آن $S[n-k]$, $k \geq 1$ آغاز می‌کنیم.

$$\hat{S}[n] = \hat{E}\{S[n]/S[n-k],\ k \geq 1\} = \sum_{k=1}^{\infty} h[k]S[n-k] \qquad (۸-۱۹)$$

این تخمینگر را تخمینگر تک پله $S[n]$ می‌نامند.

بنابراین $\hat{S}[n]$ پاسخ فیلتر تخمین

$$H(z) = h[1]z^{-1} + \dots + h[k]z^{-k} + \dots \qquad (۸-۲۰)$$

به ازاء ورودی $S[n]$ بوده و هدف ما تعیین ضرایب ثابت $h[k]$ به نحوی است که خطای تخمین MS حداقل گردد.

با استناد به اصل تعامد می‌توان گفت که خطای $\varepsilon[n] = S[n] - \hat{S}[n]$ باید بر داده ها $S[n-m]$ متعامد باشد.

$$E\{(S[n] - \sum_{k=1}^{\infty} h[k]S[n-k])S[n-m]\} = 0 \quad , m \geq 1$$
$$(۸-۲۱)$$

و در نتیجه

$$R[m] = \sum_{k=1}^{\infty} h[k]R[m-k] \quad , m \geq 1 \qquad (۸-۲۲)$$

بنابراین دستگاهی متشکل از تعداد نامحدودی معادلات داریم که
در آن‌ها مجهولات $h[k]$ **بر حسب خودبستگی** $R[m]$
مربوط به فرآیند $S[n]$ **بیان می‌شوند.**
این معادلات را معادلات وینر-هاف (Wiener-Hopf)
(شکل دیجیتالی) نامند .
معادلات وینر-هاف را نمی‌توان مستقیماً بر اساس تبدیل Z **حل نمود**
اگر چه عبارت طرف راست معادلات کانوولوشن $h[m]$ **با** $R[m]$ **است.**
دلیل آن عبارت است از اینکه بر خلاف (۱۷-۸)، دو طرف رابطهٔ (۲۲-۸)
به ازاء تمام مقادیر m **با هم برابر نیستند.**
راه حلّی بر اساس خواص تحلیلی تبدیل Z **دنباله‌های علّی و غیرعلّی**
وجود دارد، اگر چه تئوری آن ساده نمی‌باشد.
راه حلّ بسیار ساده‌ای مبتنی بر مفهوم ابداع را پیشنهاد و معرفی می‌کنیم .

ابتدا نگاهی به یک خاصیت اصلی خطای تخمین $\varepsilon[n]$
و فیلتر خطای زیر می‌اندازیم

$$E(z) = 1 - H(z) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} h[n] z^{-k} \qquad (۸-۲۳)$$

خطای $\varepsilon[n]$ **به ازاء تمام مقادیر** $m \geq 1$ **بر داده‌های**
$S[n-m]$ **متعامد است، علاوه براین** $\varepsilon[n-m]$ **تابع خطی از**
$S[n-m]$ **و گذشته آن است چون** $\varepsilon[n]$ **پاسخ سیستم علّی**
$E[z]$ **به ورودی** $S[n]$ **است . با توجه به این نکته می‌توان گفت**
که $\varepsilon[n]$ **به ازاء جمیع مقادیر** $m \geq 1$, n **بر** $\varepsilon[n-m]$
متعامد است. پس $\varepsilon[n]$ **نویز سفید است :**

$$R_{\varepsilon\varepsilon}[m]=E\{\varepsilon[n]\varepsilon[n-m]\}=P\delta[m] \qquad (۸-۲۴)$$

که در آن

$$P=E\{\varepsilon^{2}[n]\}=E\{(S[n]-\hat{S}[n])S[n]\}$$
$$=R[0]-\sum_{k=1}^{\infty}h[k]R[k]$$

خطای LMS می‌باشد. این خطا را می‌توان برحسب طیف توان $S(\omega)$ مربوط به $S(n)$ بیان کرد.

همان گونه که می‌دانیم

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|E(e^{j\omega})|^{2}S(\omega)d\omega \qquad (۸-۲۵)$$

با به کار بردن رابطه فوق، می‌توان نشان داد که تابع $E(z)$ هیچ گونه صفری در خارج دایرهٔ واحد ندارد

قضیه

اگر $E(z_i)=0$ باشد در آن صورت $|z_i|\le 1$ خواهد بود.

به منظور اثبات تابع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$E_0(z)=E(z)\frac{1-z^{-1}/z_i^{*}}{1-z_i z^{-1}}$$

این تابع یک فیلتر خطا است چون علی بوده و $E_0(\infty)=E(\infty)=1$ می باشد. علاوه بر آن، اگر $|z_i|>1$ باشد در آن صورت

$$|E_0(e^{j\omega})|=\frac{1}{|z_i|}|E(e^{j\omega})|<|E(e^{j\omega})|$$

با جایگزین کردن در رابطه (۲۵-۸)، نتیجه می‌گیریم که
اگر به عنوان فیلتر تخمین‌گر از تابع $1-E_{\circ}(z)$ استفاده کنیم،
خطای MS حاصله از P کوچکتر خواهد بود.
به هر حال این امر غیر ممکن است چون P حداقل است
پس $|z_i| \leq 1$ می‌باشد

فرآیندهای عادی

معادلات وینر -هاف (۲۲-۸) را با فرض اینکه فرآیند $S[n]$ عادی است حل می‌کنیم.
همان طور که قبلاً نشان داده‌ایم چنین فرآیندی با فرآیند نویز سفید $i[n]$ معادل خطی بوده و

$$S[n]=\sum_{k=0}^{\infty} l[k]i[n-k] \qquad (۸-۲۷)$$

$$i[n]=\sum_{k=0}^{\infty} \gamma[k]S[n-k] \qquad (۸-۲۸)$$

با توجه به مراتب فوق می‌توان گفت که تخمین $\hat{S}[n]$ از $S[n]$ را می‌توان به صورت مجموع خطی گذشتهٔ $i[n]$ نوشت

$$\hat{S}[n]=\sum_{k=1}^{\infty} h_i[k]i[n-k] \qquad (۸-۲۹)$$

بنابراین برای تعیین $\hat{S}[n]$ کافی است که ثابت های $h_i[k]$ را به دست آورده و $i[n]$ را با استفاده از رابطهٔ (۲۸-۸) برحسب $S[n]$ بیان کنیم.
بدین منظور ابتدا هم بستگی $i[n]$ و $S[n]$ را تعیین می‌نماییم.
نشان می‌دهیم که

$$R_{si}[m]=l[m] \qquad (۸-۳۰)$$

به منظور اثبات، طرفین رابطه (۲۷-۸) را در $i[n-m]$ ضرب کرده و از آن ها متوسط آماری می‌گیریم. پس می‌توان نوشت

$$E\{S[n]i[n-m]\} = \sum_{k=0}^{\infty} l[k]\, E\{i[n-k]i[n-m]\}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} l[k]\delta[m-k]$$

از آنجا که $R_{ii}[m]=\delta[m]$ است، رابطهٔ (۳۰-۸) به دست می‌آید.

برای تعیین $h_i(k)$ ، اصل تعامد را به کار می‌بریم

$$E\{(S[n]-\sum_{k=1}^{\infty} h_i[k]i[n-k])i[n-m]\}=0 \quad , m \geq 1$$

و را بطه فوق به صورت زیر در می‌آید .

$$R_{si}[m]-\sum_{k=1}^{\infty} h_i[k]R_{ii}[m-k]=$$
$$=R_{si}[m]-\sum_{k=1}^{\infty} h_i[k]\delta[m-k]=0$$

و از آنجا که مجموع آخر برابر $h_i[m]$ است، نتیجه می‌گیریم که $h_i[m]=R_{si}[m]$ می باشد .

با توجه به این نتیجه و رابطهٔ (۳۰-۸) می‌توان گفت که تخمین $\hat{S}[n]$

که بر حسب ابداع آن بیان می‌شود، برابراست با

$$\hat{S}[n]=\sum_{k=1}^{\infty} l[k]i[n-k] \qquad (۸\text{-}۳۱)$$

این نتیجه مهم را با استفاده از (۲۷-۸) مجددا اثبات می‌کنیم .

بدین منظور کافی است که نشان دهیم تفاوت $S[n]-\hat{S}[n]$ بر $i[n-m]$

به ازاء تمام مقادیر $m \geq ۱$ متعامد است .

و واقعاً این امر صادق است چون

$$\varepsilon[n]=\sum_{k=۰}^{\infty} l[k]i[n-k]-\sum_{k=1}^{\infty} l[k]i[n-k]=l[۰]i[n] \qquad (۸\text{-}۳۲)$$

و $i[n]$ نویز سفید می‌باشد.

مجموع در رابطه (۳۱-۸) پاسخ فیلتر

$$\sum_{k=1}^{\infty} l[k]z^{-k}=L(z)-l[۰]$$

به ورودی $i[n]$ است.

برای تکمیل مشخصات $\hat{S}[n]$ باید $i[n]$ را برحسب $S[n]$ بیان کرد.

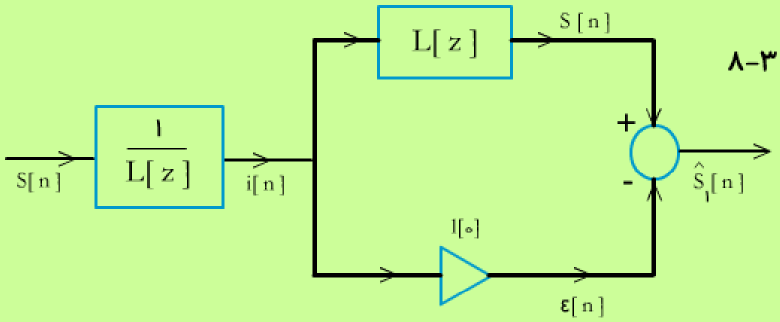
از آن جا که $i[n]$ پاسخ فیلتر $\frac{۱}{L(z)}$ به ورودی $S[n]$ است

نتیجه می‌گیریم که با اتصال ردیفی مطابق شکل (۳-۸)

با فیلتر تخمین‌گر $S[n]$ به صورت حاصلضرب

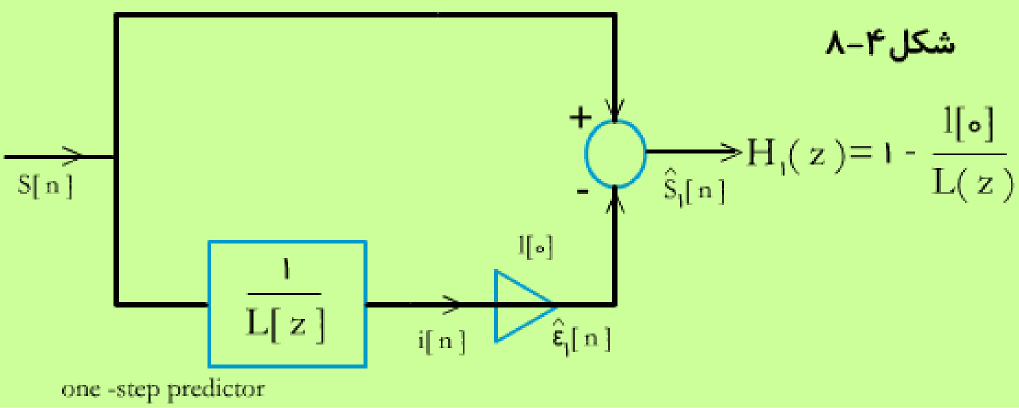
$$H(z)=\frac{1}{L[z]}\left(L(z)-l[0]\right)=1-\frac{l[0]}{L(z)} \qquad (۸\text{-}۳۳)$$

شکل ۳-۸



نشان داده شده در شکل ۴-۸ می‌باشد.

شکل ۴-۸

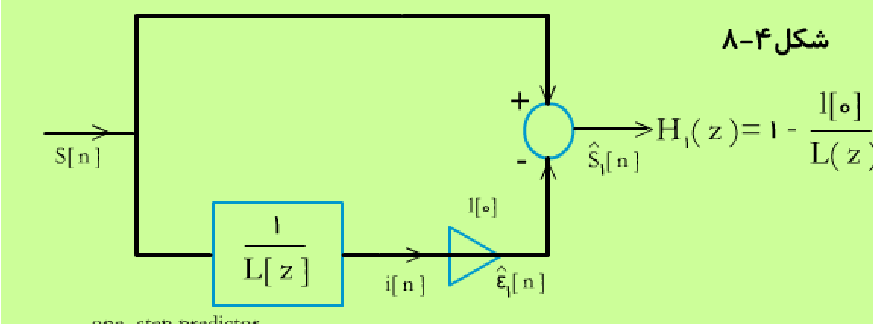


بنابراین برای تعیین $H(z)$ کافی است $S(z)$ را فاکتوربندی کنیم .

ثابت $l(0)$ را می‌توان با استفاده از قضیه مقدار اولیهٔ

$$l[0]=\lim_{z\to\infty} L(z)$$

به دست آورد



شکل۴-۸

مثال ۳-۸

فرض کنید که

$$S(\omega)=\frac{5-4\cos\omega}{10-6\cos\omega}\quad ,\ L(z)=\frac{2z-1}{3z-1}\quad ,\ l[0]=\frac{2}{3}$$

در این مورد رابطهٔ (۸-۳۳) به صورت زیر در می‌آید.

$$H(z)=1-\frac{2}{3}\times\frac{3z-1}{z\,z-1}=\frac{-z^{-1}}{6(1-z^{-1}/2)}$$

توجه کنید که $\hat{S}[n]$ را می‌توان به طرز تکراری تعیین کرد.

$$\hat{S}[n]-\frac{1}{2}\hat{S}[n-1]=-\frac{1}{6}S[n-1]$$

فرمول خطای MS، Kolmogorov - Szego

با توجه به (۸-۳۲) می‌توان گفت خطای تخمین MS برابر است با

$$P = E\{\varepsilon^2[n]\} = l^2[0]$$

علاوه بر آن

$$\ln l^2[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln |L(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

از آنجا که $S(\omega) = |L(e^{j\omega})|^2$ است، تساوی زیر به دست می‌آید.

$$P = \exp\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln S(\omega)\, d\omega\} \qquad (۸-۳۴)$$

که رابطهٔ فوق P را مستقیماً برحسب $S(\omega)$ بیان می‌کند.

فرآیندهای خود بازگشتی

اگر $S[n]$ یک فرآیند AR باشد، آن گاه $L[0] = b_0$ بوده و

$$H(z) = -a_1 z^{-1} \ldots\ldots - a_N z^{-N}$$
$$\hat{S}[n] = -a_1 S[n-1] - \ldots\ldots - a_N S[n-N],\ P = b_0^2 \qquad (۸-۳۵)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تخمین $\hat{S}[n]$ از $S[n]$ برحسب گذشتهٔ کامل آن در واقع همان تخمین برحسب N مقدار اخیر گذشته آن است.

این نتیجه را مستقیماً می‌توان به دست آورد.

با توجه به رابطهٔ (۷-۳۹) و (۸-۳۵) می‌توان گفت که

$$S[n] - \hat{S}[n] = b_0 i[n]$$

است. این دنباله $\{b_0 i[n]\}$ برگذشتهٔ $S[n]$ متعامد است

بنابراین

$$\hat{E}\{S[n]/S[n-k], 1\le k\le N\} = \hat{E}\{S[n]/S[n-k], k\ge 1\}$$

فرآیندی با چنین خاصیتی را فرآیند مارکوف به مفهوم ضعیف با مرتبهٔ N می‌نامند

پیش بینی r پله ای

می‌خواهیم تخمین

$$\hat{S}_r[n] = \hat{E}\{S[n]/S[n-k] \quad , \quad k\ge r\}$$

از $S[n]$ را برحسب $S[n-r]$ و گذشته آن با استفاده از ابداع تعیین کنیم.

می‌توان نشان داد که

$$\hat{S}_r[n] = \sum_{k=r}^{\infty} l[k]\, i[n-k] \qquad (۸-۳۶)$$

برای اثبات کافی است که نشان دهیم تفاضل

$$\hat{\varepsilon}_r[n] = S[n] - \hat{S}_r[n] = \sum_{k=0}^{r-1} l[k]\, i[n-k]$$

بر داده ها $S[n-k]$، $k\ge r$ متعامد است.

این نتیجه در واقع معلول معادل خطی بودن $S[n-k]$ با $i[n-k]$

و گذشتهٔ آن به ازاء $k\ge r$ می‌باشد، بنابراین به

$$i[n], i[n-1], \ldots, i[n-r+1]$$

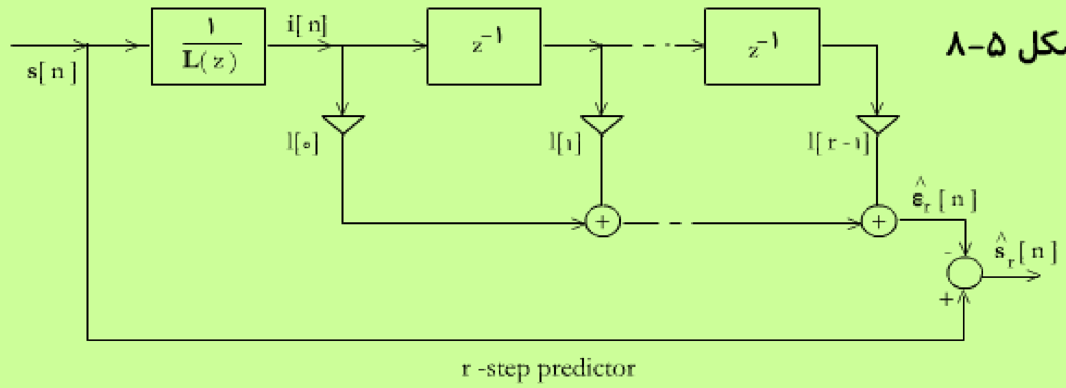
متعامد است.

خطای تخمین $\hat{\varepsilon}_r[n]$ پاسخ فیلتر MA،

$$l[0] + l[1]z^{-1} + \ldots + l[r-1]z^{-r+1}$$

در شکل (۵-۸) با ورودی $i[n]$ می‌باشد.

با اتصال متوالی این فیلتر و $\frac{1}{L[z]}$ مطابق شکل (۵-۸) نتیجه می‌گیریم که فرآیند



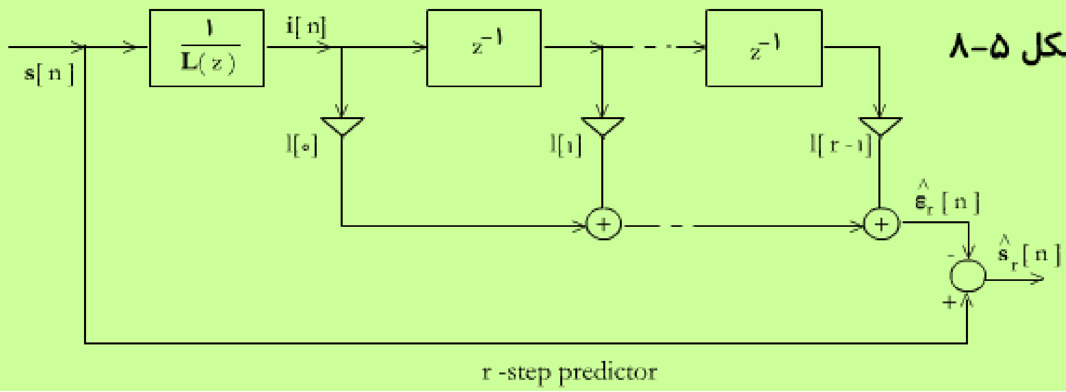
شکل ۵-۸

$$\hat{S}_r[n] = S[n] - \hat{\varepsilon}_r[n]$$

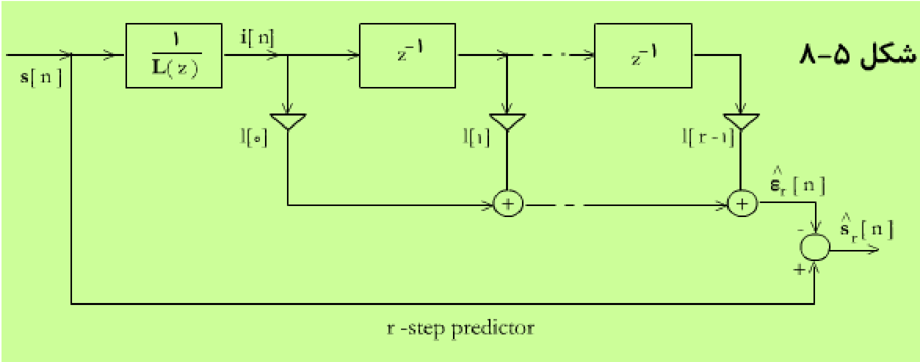
پاسخ سیستم

$$H_r(z) = 1 - \frac{1}{L[z]} \sum_{k=0}^{r-1} l[k]\, z^{-k} \qquad (۸\text{-}۳۷)$$

به ورودی S[n] است. این فیلتر را فیلتر تخمین‌گر r پله ای S[n] می‌نامند



شکل ۵-۸



شکل ۵-۸

خطای MS حاصله برابر است با

$$P_r = E\{\varepsilon_r^2[n]\} = \sum_{k=0}^{r-1} l^2[k] \qquad (8\text{-}38)$$

مثال ۴-۸

فرآیند $S[n]$ با تابع خودبستگی $R[m] = a^{|m|}$ را درنظر بگیرید.

می‌خواهیم پیش بینی r پله ای آن را تعیین کنیم . در این حالت می‌توان نوشت

$$S[z] = \frac{a^{-1} - a}{(a^{-1} + a) - (z^{-1} + z)} = \frac{b^2}{(1 - az^{-1})(1 - az)} \ , b^2 = 1 - a^2$$

$$L[z] = \frac{b}{(1 - az^{-1})} \ , \ l[n] = ba^n U[n]$$

بنابراین

$$H_r(z) = 1 - \frac{(1 - az^{-1})}{b} \sum_{k=0}^{r-1} ba^k z^{-k} = a^r z^{-r}$$

$$\hat{S}_r[n] = a^r S[n - r] \ , \ P_r = b^2 \sum_{k=0}^{r-1} a^{2k} = 1 - a^{2r}$$

فرآیندهای آنالوگ

اکنون موضوع پیش بینی مقدار آتی $S(t+\lambda)$ مربوط به فرآیند $S(t)$ برحسب گذشتهٔ کامل آن یعنی $S(t-\tau)$, $\tau \geq 0$ را در نظر بگیرید.

در این مسئله، تخمین ما انتگرال زیر بوده

$$\hat{S}(t+\lambda) = \hat{E}\{ S(t+\lambda)/S(t-\tau), \tau \geq 0 \} = \int_0^\infty h(\alpha) S(t-\alpha)\, d\alpha \qquad (۸-۳۹)$$

و تابع $h(\alpha)$ را باید تعیین کنیم. با استناد به شکل آنالوگ (۴-۸) اصل تعامد، می‌توان گفت

$$E\{ [S(t+\lambda) - \int_0^\infty h(\alpha) S(t-\alpha)] S(t-\tau) \} = 0 , \tau \geq 0$$

اصل فوق به معادلهٔ انتگرالی وینر– هاف منجر می‌شود

$$R(t+\lambda) = \int_0^\infty h(\alpha) R(\tau-\alpha)\, d\alpha , \tau \geq 0 \qquad (۸-۴۰)$$

جواب این معادله، پاسخ ضربه فیلتر وینر علی می‌باشد

$$H(s) = \int_0^\infty h(t) e^{-st}\, dt$$

وخطای MS مربوطه برابر است با

$$P=E\{[S(t+\lambda)-\hat{S}(t+\lambda)]S(t+\lambda)\}=R(0)-\int_0^\infty h(\alpha)R(\lambda+\alpha)d\alpha \quad (۸-۴۱)$$

معادلهٔ (۸-۴۰) را نمی‌توان مستقیماً با استفاده از تبدیل Z حلّ نمود چون دو طرف معادله فقط به ازاء $\tau \geq 0$ با هم برابرند.

راه حلی مبتنی بر خواص تحلیلی تبدیل لاپلاس وجود دارد ولی در این بررسی، راه حلّی بر اساس ابداع ارائه می‌شود.

همانگونه که قبلاً نشان داده شده است، فرآیند $S(t)$ پاسخ فیلتر ابداع آن $L(s)$ به فرآیند نویز سفید $i(t)$ می‌باشد. پس می‌توان نوشت

$$S(t+\lambda)=\int_{0}^{\infty} l(\alpha)\, i(t+\lambda-\alpha)\, d\alpha \qquad (۸-۴۲)$$

باید توجه کرد که $\hat{S}(t+\lambda)$ قسمتی از انتگرال فوق است که فقط شامل گذشته $i(t)$ می‌باشد.

$$\hat{S}(t+\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty} l(\alpha)\, i(t+\lambda-\alpha)\, d\alpha=\int_{0}^{\infty} l(\beta+\lambda)\, i(t-\beta)\, d\beta \qquad (۸-۴۳)$$

به منظور اثبات نکته فوق باید گفت که تفاضل زیر فقط به مقادیر $i(t)$ دربارهٔ $(t, t+\lambda)$ بستگی داشته یعنی

$$S(t+\lambda)-\hat{S}(t+\lambda)=\int_{0}^{\lambda} l(\alpha)\, i(t+\lambda-\alpha)\, d\alpha \qquad (۸-۴۴)$$

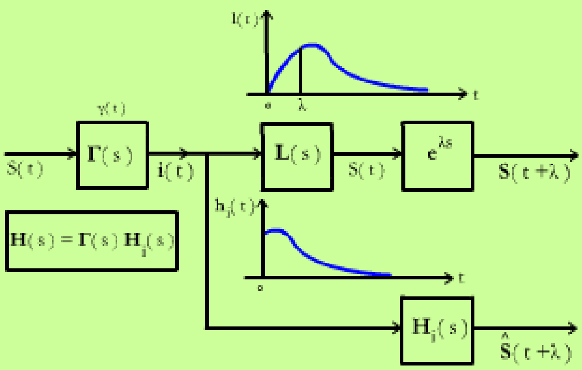
و در نتیجه به گذشتهٔ $i(t)$ متعامد بوده و بنابراین به گذشتهٔ $S(t)$ نیز متعامد است.

پیش بینی $\hat{S}(t+\lambda)$ مربوط به $S(t)$ پاسخ سیستم

$$H_i(s)=\int_{0}^{\infty} h_i(t)e^{-st}dt\ ,\ \ h_i(t)=l(t+\lambda)\,U(t) \qquad (۸-۴۵)$$

به ورودی $i(t)$ است. (شکل ۶-۸)

(شکل ۶-۸)



از اتصال ردیفی با $\frac{1}{L[s]}$ ، نتیجه می‌گیریم که $\hat{S}(t+\lambda)$ پاسخ سیستم

$$H(s) = \frac{H_i(s)}{L(s)} \qquad (۸-۴۶)$$

به ورودی $S(t)$ است. بنابراین به منظور تعیین فیلتر پیش بینی $H(s)$ مراحل زیر باید تحقق یابد:

- طیف $S(t)$ را بر طبق رابطهٔ (۳-۷) یعنی $S(s) = L(s)L(-s)$ تجزیه و فاکتور بندی کنید.
- تبدیل معکوس $L(s)$ یعنی $l(t)$ را به دست آورده و تابع

$$h_i(t) = l(t+\lambda)\,U(t)$$

را تشکیل دهید.

- تبدیل $h_i(t)$ یعنی $H_i(s)$ را تعیین و براساس (۸-۴۶) $H(s)$ را به دست آورید.

خطای تخمین MS با استفاده از (۸-۴۴) عبارت است از

$$P = E\{|\int_0^{\lambda} l(\alpha)\, i(t+\lambda-\alpha)\, d\alpha|^2\} = \int_0^{\lambda} l^2(\alpha)\, d\alpha \qquad (۸-۴۷)$$

مثال ۵-۸

فرآیند $S(t)$ با تابع خود بستگی $R(\tau)=2\alpha e^{-\alpha|\tau|}$ داده شده است.
می‌خواهیم پیش‌بینی کنندهٔ آن را تعیین کنیم.
در این مسأله

$$S(s)=\frac{1}{\alpha^2-s^2} \quad , \quad L(s)=\frac{1}{\alpha+s} \quad , \quad l(t)=e^{-\alpha t}U(t)$$

$$h_i(t)=e^{-\alpha\lambda}e^{-\alpha t}U(t) \quad , \quad H_i(s)=\frac{e^{-\alpha\lambda}}{\alpha+s}$$

$$H(s)=e^{-\alpha\lambda} \quad , \quad \hat{S}(t+\lambda)=e^{-\alpha\lambda}S(t)$$

نتیجه فوق نشان می‌دهد که پیش‌بینی $S(t+\lambda)$ بر حسب گذشتهٔ کامل آن با پیش‌بینی آن بر حسب مقدار فعلی $S(t)$ ، برابر است .

به عبارت دیگر، اگر $S(t)$ مشخص باشد ، گذشته تأثیری در پیش‌بینی خطی مقدار آتی فرآیند نخواهد داشت.

اگر $S(t)$ دارای طیف گویا باشد ، تعیین $H(s)$ امری ساده خواهد بود.
با فرض اینکه قطب‌های $H(s)$ ساده هستند می‌توان نوشت:

$$L(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\sum_i \frac{c_i}{s-s_i}, \quad l(t)=\sum_i c_i e^{s_i t}U(t)$$

$$h_i(t)=\sum_i c_i e^{s_i\lambda}e^{s_i t}U(t) \quad , \quad H_i(s)=\sum_i \frac{c_i e^{s_i\lambda}}{s-s_i}=\frac{N_1(s)}{D(s)} \tag{8-48}$$

و با توجه به رابطهٔ (۴۶-۸) داریم

$$H(s)=N_1(s)/N(s)$$

اگر $N(s)=1$ باشد در آن صورت $H(s)$ یک چندجمله‌ای خواهد بود:

$$H(s)=N_1(s)=b_0+b_1S+\ldots\ldots+b_nS^n$$

و $\hat{S}(t+\lambda)$ مجموع خطی $S(t)$ و n مشتق اول آن خواهد بود:

$$\hat{S}(t+\lambda)=b_0S(t)+b_1S'(t)+\ldots\ldots+b_nS^{(n)}(t)$$

مثال ۶-۸

فرآیند $S(t)$ با

$$S(s)=\frac{49-25s^2}{(1-s^2)(9-s^2)} \quad , \quad L(s)=\frac{7+5s}{(1+s)(3+s)}$$

داده شده است.

می‌خواهیم مقدار آتی فرآیند $S(t+\lambda)$ به ازاء $\lambda=\log 2$ را تخمین بزنیم.

در این مسأله $e^{\lambda}=2$ بوده و

$$L(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{4}{s+3} \quad , \quad H_1(s)=\frac{e^{-\lambda}}{s+1}+\frac{4e^{-3\lambda}}{s+3}=\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$H(s)=\frac{s+2}{5s+7} \quad , \quad h(t)=\frac{1}{5}\delta(t)+\frac{3}{25}e^{-1.4t}U(t)$$

بنابراین

$$\hat{E}\{S(t+\lambda)/S(t-\tau),\tau\geq 0\}=$$
$$0.2S(t)+\hat{E}\{S(t+\lambda)/S(t-\tau),\tau>0\}$$

فرآیندهای قابل پیش‌بینی

فرآیند $S[n]$ هنگامی قابل پیش‌بینی نامیده می‌شود که با پیش‌بینی خود برابر باشد.

$$S[n]=\sum_{k=1}^{\infty} h[k]S[n-k] \qquad (۸-۴۹)$$

در این حالت می‌توان نشان داد (۲۵-۸)

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|E(e^{j\omega})|^2 S(\omega)d\omega=0 \qquad (۸-۵۰)$$

از آنجا که $S(\omega)\geq 0$ است ، انتگرال فوق هنگامی صفر است که $S(\omega)\neq 0$ فقط در ناحیهٔ R محور ω که در آن $E(e^{j\omega})=0$ می‌باشد رخ دهد.

می‌توان نشان داد که این ناحیه از تعداد قابل شمارشی از نقاط ω_i تشکیل یافته است و اثبات آن مبتنی بر معیار پالی – وینر می‌باشد. بدین علّت می‌توان نوشت:

$$S(\omega)=2\pi\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\delta(\omega-\omega_i) \quad , \quad E(e^{j\omega_i})=0 \qquad (۸-۵۱)$$

بنابراین فرآیند $S[n]$ هنگامی قابل پیش‌بینی است که به صورت مجموعی از توابع نمائی باشد.

$$S[n]=\sum_{i=1}^{m} c_i e^{j\omega_i n} \quad , \quad E\{c_i^2\}=\alpha_i>0 \qquad (۸-۵۲)$$

باید گفت معکوس مطلب فوق نیز صادق است.

اگر $S[n]$ مجموع m تابع نمائی مانند (۸-۵۲) باشد در آن صورت قابل پیش‌بینی بوده و فیلتر پیش‌بینی‌کنندهٔ آن برابر $1-D(z)$ است.

به طوری که

$$D(z)=(1-e^{j\omega_1}z^{-1})\ ....\ (1-e^{j\omega_n}z^{-1}) \quad (۸-۵۳)$$

برای اثبات باید توجه کرد که در این مورد ، $E(z)=D(z)$ بوده و $E(e^{j\omega_i})=0$ است . پس $E(e^{j\omega})S(\omega)=0$ خواهد بود.

چون

$$E(e^{j\omega})\delta(\omega-\omega_i)=E(e^{j\omega_i})\delta(\omega-\omega_i)=0$$

بوده و در نتیجه $P=0$

فرآیندهای عام و تجزیه Wold

نهایتاً نشان می‌دهیم که هر فرآیند دلخواه مانند $S[n]$ را می‌توان به صورت مجموع

$$S[n]=S_1[n]+S_2[n] \qquad (۸-۵۴)$$

بیان کردکه در آن $S_1[n]$ فرآیند عادی (regular) و $S_2[n]$ فرآیند قابل پیش‌بینی بوده و این فرآیندها بر یکدیگر متعامد و دارای فیلتر تخمین‌گر یکسان می‌باشند.

بدین ترتیب موضوع تجزیه Wold فصل قبل را در رابطه با تخمین MS مورد بازبینی قرار می‌دهیم .

همان‌گونه که می‌دانیم (رابطه ۲۴-۸ را ببینید) خطای $\varepsilon[n]$ تخمین تک پله‌ای $S[n]$ یک فرآیند نویز سفید است .

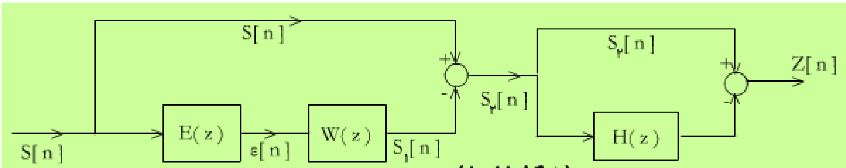
تخمین $S_1[n]$ از $S[n]$ را بر حسب $\varepsilon[n]$ و گذشتهٔ آن تشکیل می‌دهیم.

$$S_1[n]=\hat{E}\{S[n]/\varepsilon[n-k]\,,\,k\geq 0\}=\sum_{k=0}^{\infty} w_k\,\varepsilon[n-k] \qquad (۸-۵۵)$$

بنابراین $S_1[n]$ پاسخ سیستم (شکل۷-۸)

$$W(z)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k\, z^{-k}$$

به ورودی $\varepsilon[n]$ است.



(شکل۷-۸)

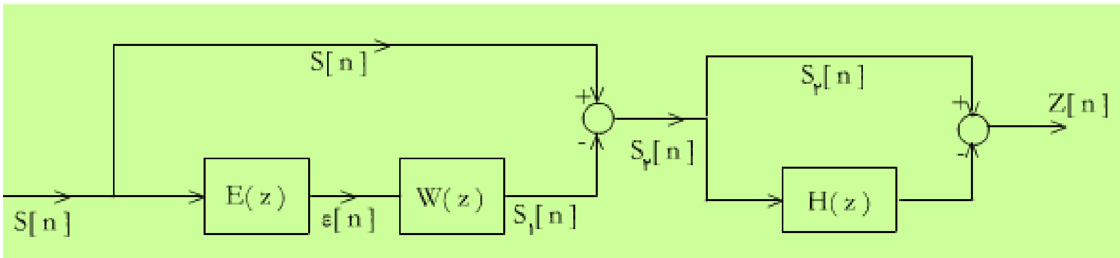
تفاضل

$$S_2[n]=S[n]-S_1[n]$$

خطای تخمین شکل (۷-۸) می‌باشد.

بدیهی است (اصل تعامد) که :

$$S_2[n]\perp\varepsilon[n-k] \quad , \quad k\geq 0 \qquad (۸-۵۶)$$



(شکل۷-۸)

توجه کنید که اگر $S[n]$ فرآیند عادی باشد در آن صورت

$$\varepsilon[n]=l[0]\,i[n]$$

بوده و در این حالت

$$S_1[n]=S[n]$$

خواهد بود .

قضیه

الف) فرآیندهای $S_1[n]$ و $S_2[n]$ متعامد هستند:

به ازاء جمیع مقادیر k $\quad S_1[n]\perp S_2(n-k)$

(۸-۵۷)

ب) $S_1[n]$ فرآیند عادی است.

ج) $S_2[n]$ فرآیند قابل پیش‌بینی است و فیلتر پیش‌بینی کنندهٔ آن مجموع رابطه (۱۹-۸) می‌باشد.

$$S_2[n]=\sum_{k=1}^{\infty} h(k)S_2[n-k]$$

(۸-۵۸)

برای اثبات بند (الف) این قضیه باید گفت که $\varepsilon[n]$ به ازاء تمام مقادیر $k>0$ بر $S[n-k]$ متعامد است.

علاوه بر این $S_2[n-k]$ تابع خطی از $S[n-k]$ و گذشتهٔ آن است، پس $S_2[n-k]$ به ازاء $k>0$ بر $\varepsilon[n]$ متعامد است.

از ادغام این نتیجه با رابطهٔ (۸-۵۶) می‌توان گفت:

به ازاء تمام مقادیر k $\quad S_2[n-k]\perp\varepsilon[n]$

(۸-۵۹)

و از آنجا که $S_1[n]$ به‌طور خطی به $\varepsilon[n]$ و گذشتهٔ آن وابسته است پس رابطهٔ (۸-۵۷) نتیجه می‌شود.

در مورد بند (ب) این قضیه باید توجه کرد که فرآیند $S_1[n]$ پاسخ سیستم $W(z)$ به نویز سفید $\varepsilon[n]$ می‌باشد.

برای اثبات اینکه فرآیند مذکور فرآیندی عادی است ، کافی است که نشان دهیم

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k^2<\infty \qquad (۸-۶۰)$$

با استناد به روابط (۸-۵۴) و (۸-۵۵) می‌توان نتیجه گرفت که :

$$E\{S^2[n]\}=E\{S_1^2[n]\}+E\{S_2^2[n]\}\geq$$

$$E\{S_1^2[n]\}=\sum_{k=0}^{\infty} w_k^2$$

رابطهٔ فوق در واقع رابطهٔ (۸-۶۰) را تأیید می‌کند چون :

$$E\{S^2[n]\}=R(0)<\infty$$

در رابطه با اثبات بند (ج)، کافی است که نشان دهیم تفاضل

$$Z[n]=S_2[n]-\sum_{k=1}^{\infty} h[k]S_2[n-k]$$

برابر صفر است.

با توجه به (۸-۵۹) می‌توان گفت که به ازاء جمیع مقادیر k ،

$$Z[n]\perp\varepsilon[n-k]$$

است.

ولی $Z[n]$ پاسخ سیستم $1-H(z)=E(z)$ به ورودی

$$S_2[n]=S[n]-S_1[n]$$

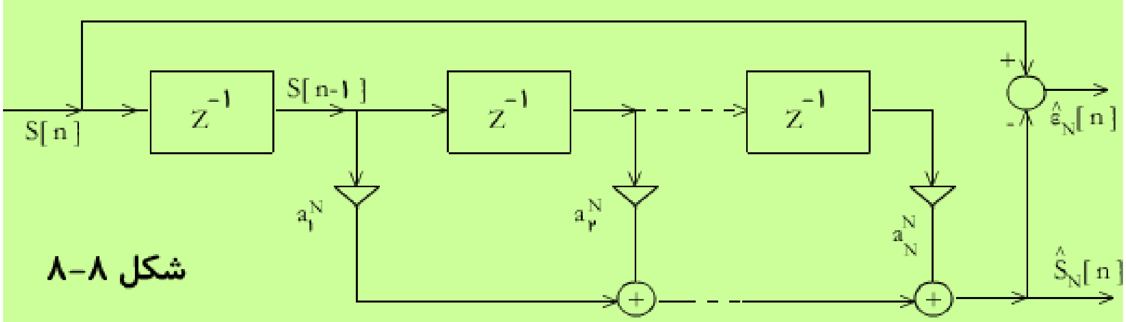
بنابراین (به شکل ۸-۸ مراجعه کنید)

$$Z[n]=\varepsilon[n]-S_1[n]+\sum_{k=1}^{\infty} h[k]S_1[n-k] \qquad (۸-۶۱)$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که $Z[n]$ تابع خطی از $\varepsilon[n]$ و گذشتهٔ آن است.

و از آنجا که $Z[n]$ بر $\varepsilon[n]$ نیز متعامد است

نتیجه می‌گیریم که $Z[n]=0$ می‌باشد.



شکل ۸-۸

در پایان باید توجه کرد که (رابطهٔ (۶۱-۸) را ببینید.)

$$S_1[n]-\sum_{k=1}^{\infty} h[k]S_1[n-k]=\varepsilon[n]\perp S_1[n-m] \quad , m\geq 1$$

بنابراین ، این مجموع ، پیش بینی $S_1[n]$ می‌باشد.

پس نتیجه می‌گیریم که مجموع $H(z)$ در رابطه (۲۰-۸) فیلتر پیش‌بینی‌کننده فرآیندهای $S[n]$ ، $S_1[n]$ و $S_2[n]$ می‌باشد.

پیش‌بینی‌کننده‌های FIR

می‌خواهیم تخمین $\hat{S}_N[n]$ فرآیند $S[n]$ را بر حسب N نمونهٔ اخیر (گذشتهٔ) آن به دست آوریم:

$$\hat{S}_N[n]=\hat{E}\{S[n]/S[n-k], 1\leq k\leq N\}$$
$$=\sum_{k=1}^{N} a_k^N S[n-k] \qquad (۸-۶۲)$$

این تخمین را پیش‌بینی کننده پیشرو (Forward) با مرتبهٔ N می‌نامند.

اندیس بالا در a_k^N مرتبه را نشان می‌دهد.

فرآیند $\hat{S}_N[n]$ پاسخ فیلترپیش‌بینی کنندهٔ پیشرو

$$\hat{H}_N(z)=\sum_{k=1}^{N} a_k^N z^{-k} \qquad (۸-۶۳)$$

هدف از این بررسی تعیین مقادیر ثابت a_k^N به نحوی است که مقدار MS خطای پیش‌بینی پیشرو

$$\hat{\varepsilon}_N[n]=S[n]-\hat{S}_N[n]$$

یعنی

$$P_N=E\{\hat{\varepsilon}_N^{۲}[n]\}=E\{(S[n]-\hat{S}_N[n])S[n]\} \quad (۸\text{-}۶۴)$$

معادلات Yule - Walker

با استناد به اصل تعامد می‌توان گفت

$$E\{(S[n]-\sum_{k=۱}^{N} a_k^N S[n-k])\,S[n-m]\}=۰ \qquad ۱\le m\le N \quad (۸\text{-}۶۵)$$

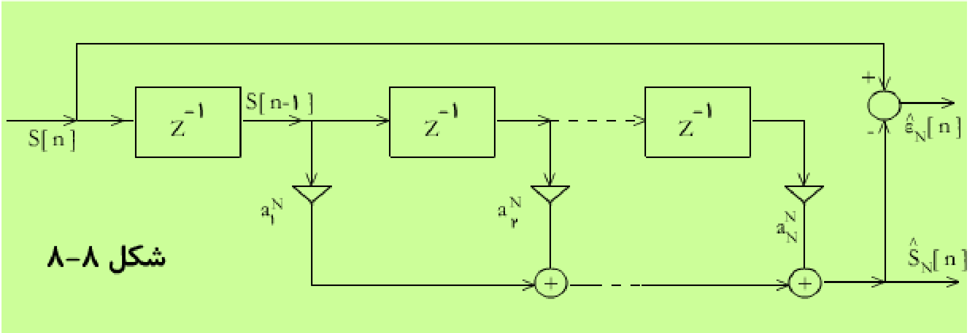
و این رابطه منجر به سیستم معادلات زیر می‌شود.

$$R[m]-\sum_{k=۱}^{N} a_k^N R[m-k]=۰ \qquad ۱\le m\le N \quad (۸\text{-}۶۵)$$

با حل معادلات فوق، ضرایب a_k^N مربوط به فیلتر پیش بینی کنندهٔ $\hat{H}_N(z)$ به دست می‌آید. خطای MS حاصله برابر است با

$$P_N=R[۰]-\sum_{k=۱}^{N} a_k^N R[k] \quad (۸\text{-}۶۶)$$

در شکل ۸-۸ تحقق نردبانی $\hat{H}_N(z)$ و فیلتر خطای پیشرو $\hat{E}_N(z)=۱-\hat{H}_N(z)$ نشان داده شده است.

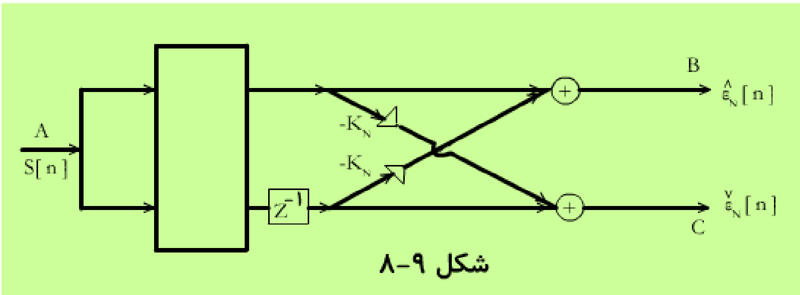


شکل ۸-۸

فیلتر خطا را نیز می‌توان توسط ساختار لتیس (Lattice) (شکل ۹-۸) تحقق بخشید.

در این شکل ورودی $S[n]$ و خروجی فوقانی $\hat{\varepsilon}_N[n]$ می‌باشد.

خروجی تحتانی $\check{\varepsilon}_N[n]$ خطای پیش بینی پسرو (Backward) بدین صورت تعریف می‌شود



شکل ۹-۸

فرآیندهای $S[n]$ و $S[-n]$ دارای خود بستگی یکسانی هستند.

بنابراین فیلترهای پیش بینی کنندهٔ آن ها یکسان است.

با توجه به این نکته می‌توان گفت که پیش بینی کنندهٔ پسرو $\check{S}_N[n]$ یعنی پیش بینی $S[n]$ برحسب N نمونه مقدار آتی اخیر آن، برابر است با

$$\check{S}_N[n] = \hat{E}\{S[n] / S[n+k],\ 1 \le k \le N\} = \sum_{k=1}^{N} a_k^N S[n+k]$$

خطای پسرو

$$\check{\varepsilon}_N[n] = S[n-N] - \check{S}_N[n-N]$$

پاسخ فیلتر

$$\check{E}_N(z) = z^{-N}(1 - a_1^N z - \ldots\ldots - a_N^N z^N) = z^{-N}\hat{E}_N(1/z)$$

با ورودی $S[n]$ می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت که خروجی تحتانی لتیس شکل ۹–۸

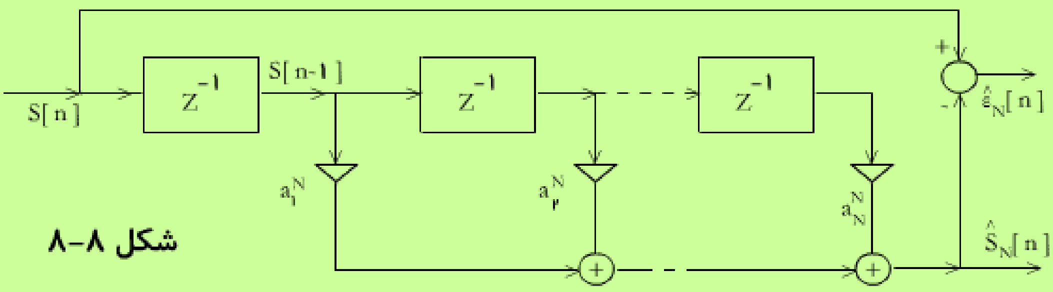
عبارت است از $\check{\varepsilon}_N[n]$.

قابل توجه است که تحقق لتیس مزیت زیر را داراست.

تصور کنید پیش بینی کننده ای با مرتبهٔ N داریم و می‌خواهیم پیش بینی کننده ای با مرتبهٔ $N+1$ را تعیین کنیم.

در تحقق نردبانی (ساختار مستقیم در شکل ۸–۸) باید مجموعه ای جدید شامل $N+1$ ضرایب a_k^{N+1} را به دست آوریم.

در تحقق لتیس فقط به تعیین ضریب انعکاس جدید K_{N+1} نیاز داشته و N ضریب انعکاس K_k تغییری نمی‌کنند.



شکل ۸–۸

الگوریتم لوینسون (Levinson)

ضرایب ثابت a_k^N و K_N و P_N را به طور تکراری می‌توان تعیین کرد.
این امر شامل مراحل زیر است. ابتدا

$$a_1^1 = K_1 = R[1] / R[0] \quad , \quad P_1 = (1 - K_1^2)\, R[0]$$

فرض کنید که $N + 1$ ضرایب ثابت a_k^{N-1} و K_{N-1} و P_{N-1}
معلوم و در دست است. K_N و P_N را از معادلات زیر به دست می‌آوریم

$$P_{N-1} K_N = R[N] - \sum_{k=1}^{N-1} a_k^{N-1} R[N-k] \, , \quad P_N = (1 - K_N^2)\, P_{N-1} \qquad (۸-۶۷)$$

سپس a_k^N را از رابطهٔ زیر محاسبه می‌کنیم

$$a_N^N = k_N \, , \quad a_k^N = a_k^{N-1} - k_N \, a_{N-k}^{N-1} \quad , \quad 1 \le k \le N-1 \qquad (۸-۶۸)$$

در الگوریتم لوینسون، مرتبه N تکرار محدود است ولی می‌تواند به مقدار نامحدودی ادامه داشته باشد.

خواص پیش بینی کننده و P_N یا خطای MS را به ازاء $N \to \infty$ بررسی می‌کنیم.
بدیهی است که P_N دنبالهٔ غیر افزایشی از اعداد مثبت است،
بنابراین به حدِ مثبتی میل می‌کند.

$$P_1 \ge P_2 \; \ldots\ldots \ge P_N \xrightarrow[N \to \infty]{} P \ge 0 \qquad (۸-۶۹)$$

همان طور که قبلاً نشان داده شد، صفرهای z_i فیلتر خطا

$$\hat{E}_N(z) = 1 - \sum_{k=1}^{N} a_k^N \, z^{-k}$$

تماماً داخل دایرهٔ واحد یا تماماً روی دایرهٔ واحد قرار دارند.

اگر $P_N > 0$ باشد آن گاه $|K_k| < 1$ به ازاء تمام مقادیر $k \leq N$ و $|z_i| < 1$ به ازاء تمام مقادیر i خواهد بود.

اگر $P_{N-1} > 0$ و $P_N = 0$ باشد در آن صورت $|K_k| < 1$ به ازاء تمام مقادیر $k \leq N-1$ و $|K_N| = 1$ و $|z_i| = 1$ به ازاء تمام مقادیر i خواهد بود.

در این حالت، فرآیند $S[n]$ قابل پیش بینی بوده و طیف آن متشکل از خطوط است.

اگر $P > 0$ باشد آن گاه $|z_i| < 1$ به ازاء تمام مقادیر i خواهد بود.

در این حالت، پیش بینی کنندهٔ $\hat{S}_N[n]$ مربوط به $S[n]$ به پیش بینی کنندهٔ وینر بر اساس رابطهٔ ۱۹-۸ میل می‌کند.

با توجه به این نکته و نیز رابطهٔ (۳۴-۸) می‌توان گفت

$$P = \exp\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln S(\omega)\, d\omega\} = l[0] = \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N} \qquad (۸-۷۰)$$

این رابطه در واقع ارتباط بین P، خطای MS پیش بینی $S[n]$ مبتنی بر گذشتهٔ کامل آن، طیف توان $S(\omega)$ مربوط به $S[n]$، مقدار اولیهٔ $l[0]$ پاسخ ضربه $l[n]$ فیلتر ابداع آن و دترمینان هم بستگی Δ_N را بیان می کند. در پایان، فرض کنید که $P_{M-1} > P_M$ بوده و

$$P_M = P_{M-1} = \ldots\ldots = P \qquad (۸-۷۱)$$

در این حالت، $K_k = 0$ به ازاء $|k| > M$ بوده و بنابراین الگوریتم در مرحله M ام خاتمه می یابد.

با توجه به این امر، می‌توان نتیجه گرفت که پیش بینی کنندهٔ مرتبهٔ M ام $\hat{S}_M[n]$ مربوط به $S[n]$ با پیش بینی کنندهٔ وینر برابر است.

$$\hat{S}_M[n] = \hat{E}\{ S[n] / S[n-k] ; 1 \le k \le M \}$$
$$= \hat{E}\{ S[n] / S[n-k] , k \ge 1\}$$

به عبارت دیگر، فرآیند $S[n]$ فرآیند مارکوف به مفهوم ضعیف از مرتبهٔ M می‌باش

موضوع مذکور منجر به این نتیجه می‌شود که خطای پیش بینی

$$\hat{\varepsilon}_M[n] = S[n] - \hat{S}_M[n]$$

نویز سفید با توان متوسط P بوده

$$S[n] - \sum_{k=1}^{M} a_k^N \, S[n-k] = \hat{\varepsilon}_M[n] \quad , \quad E\{\hat{\varepsilon}_M^2[n]\} = P$$

و نشان می‌دهد که $S[n]$ فرآیند AR است. بالعکس، اگر $S[n]$

فرآیند AR باشد در آن صورت فرآیند مارکوف به مفهوم ضعیف نیز است

۳–۸ فیلترینگ و پیش بینی

در این بخش، مسأله تخمین مقدار آتی $S(t+\lambda)$ فرآیند تصادفی $S(t)$ (سیگنال) برحسب مقادیر حال و گذشتهٔ فرآیند عادی $X(t)$ (سیگنال به علاوهٔ نویز) را بررسی می‌کنیم.

$$\hat{S}(t+\lambda) = \hat{E}\{ S(t+\lambda) / X(t-\tau) , \ \tau \ge 0 \}$$
$$= \int_0^{\infty} h_x(\alpha)\, X(t-\alpha)\, d\alpha \qquad (8\text{-}72)$$

بنابراین $\hat{S}(t+\lambda)$ خروجی سیستم علّی، تغییر ناپذیر با زمان و خطی $H_x(s)$ با ورودی $X(t)$ است.

برای تعیین $H_x(s)$ اصل تعامد را به کار می‌بریم.

$$E\{ [S(t+\lambda) - \int_0^{\infty} h_x(\alpha)\, X(t-\alpha)\, d\alpha]\, X(t-\tau) \} = 0 \quad \tau \ge 0$$

معادلهٔ وینر – هاف حاصله عبارت است از:

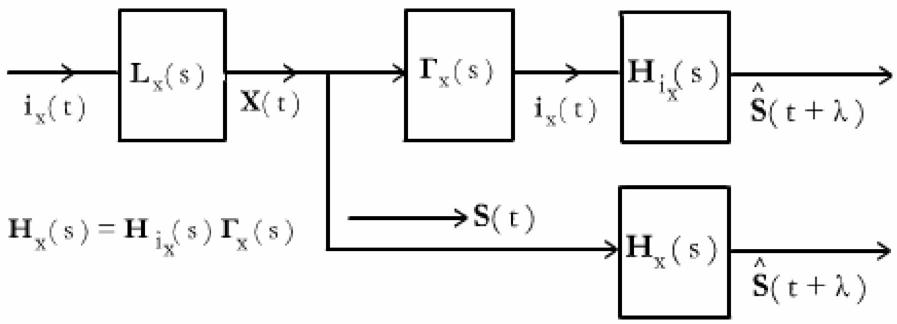
$$R_{sx}(\tau+\lambda)=\int_{0}^{\infty} h_x(\alpha)\,R_{xx}(\tau-\alpha)\,d\alpha \quad \tau \geq 0 \qquad (۸-۷۳)$$

جواب $h_x(t)$ معادلهٔ فوق، پاسخ ضربه سیستم پیش بینی و فیلترینگ معروف به فیلتر وینر است. اگر $X(t)=S(t)$ باشد، آن گاه $h_x(t)$ پیش بینی کنندهٔ خالص (رابطهٔ ۳۹-۸) خواهد بود.

اگر $\lambda=0$ باشد، در آن صورت $h_x(t)$ فیلتر خالص می‌باشد.

به منظور حلِ معادلهٔ (۷۳-۸)، $X(t)$ را برحسب ابداع آن یعنی $i_x(t)$ (شکل ۱۰-۸) بیان می‌کنیم.

$$X(t)=\int_{0}^{\infty} l_x(\alpha)\,i_x(t-\alpha)\,d\alpha \;,\; R_{ii}(\tau)=\delta(\tau) \qquad (۸-۷۴)$$

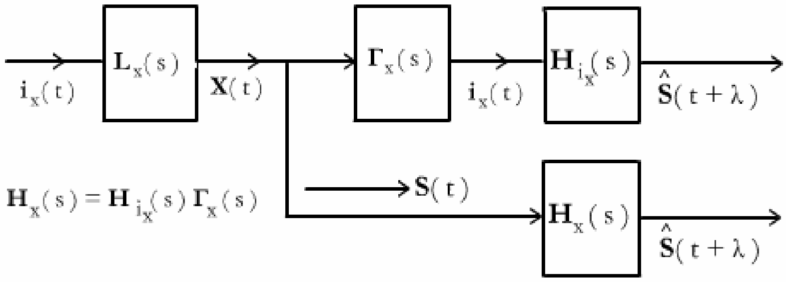


(شکل ۱۰-۸)

که در آن $l_x(t)$ پاسخ ضربه فیلتر ابداع $L_x(s)$ حاصل از فاکتور بندی طیف $X(t)$ می‌باشد.

$$S_{xx}(s)=L_x(s)\,L_x(-s) \qquad (۸-۷۵)$$

همان گونه که می‌دانیم، فرآیندهای $i_x(t)$ و $X(t)$ معادل خطی هستند و بنابراین تخمین $\hat{S}(t+\lambda)$ را می‌توان به عنوان خروجی فیلتر علّی $H_{i_x}(s)$ با ورودی $i_x(t)$ تلقی کرد:



(شکل ۱۰-۸)

$$\hat{S}(t+\lambda) = \int_0^\infty h_{i_x}(\alpha)\, i_x(t-\alpha)\, d\alpha \qquad (۸-۷۶)$$

برای تعیین $h_{i_x}(t)$ ، از اصل تعامد استفاده می‌کنیم

$$E\{ [S(t+\lambda) - \int_0^\infty h_{i_x}(\alpha)\, i_x(t-\alpha)\, d\alpha]\, i_x(t-\tau) \} = ۰ \ , \ \tau \geq ۰$$

چون $i_x(t)$ نویز سفید است پس

$$R_{Si_x}(\tau+\lambda) = \int_0^\infty h_{i_x}(\alpha)\, \delta(\tau-\alpha)\, d\alpha = h_{i_x}(\tau) \ , \ \tau \geq ۰ \quad (۸-۷۷)$$

این رابطه، $h_{i_x}(\tau)$ را به ازاء تمام مقادیر τ تعیین می‌کند چون $h_{i_x}(\tau) = ۰$ به ازاء $\tau < ۰$ می‌باشد.

$$h_{i_x}(\tau) = R_{Si_x}(\tau+\lambda)\, U(\tau) \qquad (۸-۷۸)$$

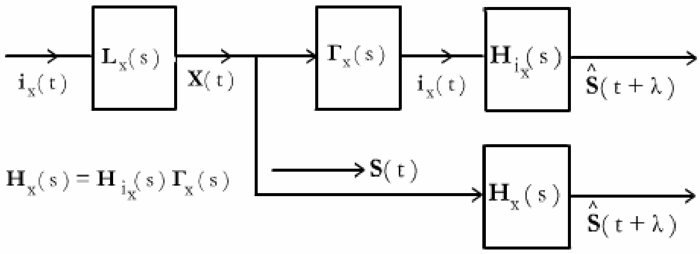
روابط (۷۷-۸) و (۷۸-۸)، $R_{Si_x}(\tau)$ تابع هم بستگی متقابل بین سیگنال $S(t)$ و فرآیند $i_x(t)$ است. تابع $R_{Si_x}(\tau)$ را می‌توان بر حسب تابع هم بستگی $R_{sx}(\tau)$ بین $S(t)$ و $X(t)$ بیان کرد.

در حقیقت، از آن جا که $i_x(t)$ خروجی فیلتر سفید کننده $\Gamma_x(s)$ با ورودی $X(t)$ است، می‌توان نشان داد که

$$S_{si_x}(s) = S_{sx}(s)\ \Gamma_x(-s) \qquad (۸-۷۹)$$

بنابراین، چون فرض می‌کنیم $S_{sx}(s)$ معلوم است، رابطهٔ (۷۹-۸) تابع $R_{si_x}(\tau)$ را تعیین کرده و با جابجائی آن به طرف چپ و بریدن آن بر طبق رابطهٔ (۷۸-۸)، $h_{i_x}(\tau)$ به دست می‌آید.

برای تکمیل مشخصات $H_x(s)$ ، تبدیل $H_{i_x}(s)$ تابع $h_{i_x}(t)$ به دست آمده را در $\Gamma_x(s)$ ضرب می‌کنیم (شکل ۱۰-۸ را ببینید.



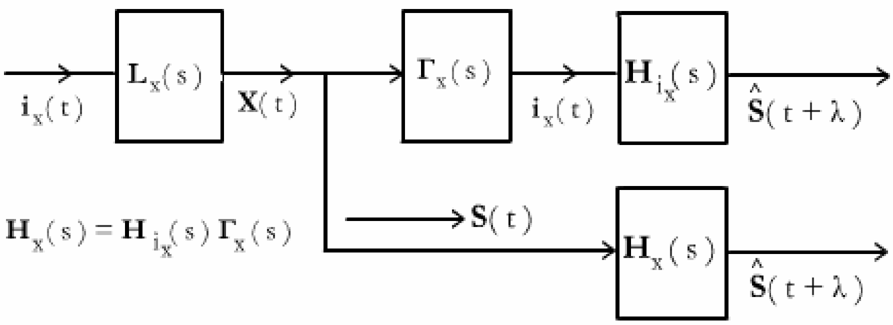
(شکل ۱۰-۸)

$$H_x(s) = H_{i_x}(s)\ \Gamma_x(s) \qquad (۸-۸۰)$$

تابع $H_{i_x}(s)$ را می‌توان مستقیماً از (۷۹-۸) به دست آورد.

همان طور که می‌دانیم (قضیهٔ جابجائی) تبدیل $R_{si_x}(\tau+\lambda)$ برابر است با

$$S_\lambda(s) = S_{si_x}(s)\, e^{\lambda s} = S_{sx}(s)\ \Gamma_x(-s)\, e^{\lambda s} \qquad (۸-۸۱)$$



(شکل ۱۰-۸)

برای تعیین $H_{i_x}(s)$ ، کافی است $S_\lambda(s)$ را به صورت مجموع زیر بنویسیم

$$S_\lambda(s) = S_\lambda^+(s) + S_\lambda^-(s) \qquad (۸-۸۲)$$

که در آن $S_\lambda^+(s)$ در نیم صفحه راست S تحلیلی بوده و $S_\lambda^-(s)$ در نیم صفحه چپ S تحلیلی می‌باشد.

از آن جا که تبدیل معکوس تابع $S_\lambda^+(s)$ و $S_\lambda^-(s)$ به ترتیب برابر $R_{si_x}(\tau+\lambda)\,U(\tau)$ و $R_{si_x}(\tau+\lambda)\,U(-\tau)$ است می‌توان از رابطهٔ (۸-۷۸) نتیجه گرفت که

$$H_{i_x}(s) = S_\lambda^+(s) \qquad (۸-۸۳)$$

بنابراین، به منظور تعیین تابع سیستم $H_x(s)$ فیلتر وینر، مراحل زیر باید انجام شود:

- $S_{xx}(s)$ را بر طبق رابطهٔ (۸-۷۵) فاکتور بندی نموده و $\Gamma_x(s) = 1/L_x(s)$ را تعیین کنید.
- بر اساس رابطهٔ (۸-۷۹) S_{si_x} را حساب کرده و با استفاده از (۸-۸۱) تابع $S_\lambda(s)$ راتشکیل دهید.
- مطابق رابطهٔ (۸-۸۲) $S_\lambda(s)$ را تجزیه کرده و با استفاده از (۸-۸۳) تابع $H_{i_x}(s)$ را تعیین کنید.
- $H_x(s)$ را با استفاده از رابطه (۸-۸۰) به دست آورید.

اگر تابع $S_\lambda(s)$ گویا باشد، در آن صورت تجزیه (۸-۸۲) را می‌توان با بسط $S_{si_x}(s)$ به کسرهای جزئی تحقق بخشید.

با فرض این که $S_{si_x}(s)$ کسر صحیحی با قطب های ساده است می‌توان نوشت

$$S_{si_x}(s)=\sum_i \frac{a_i}{s-s_i}+\sum_k \frac{b_k}{s-z_k} \qquad \begin{matrix} \mathrm{Re}\ S_i<0 \\ \mathrm{Re}\ z_k>0 \end{matrix} \qquad (۸-۸۴)$$

معکوس مجموع دوم به ازاء $\tau>0$ برابر صفر است.

بنابراین اگر آن را به چپ جابجا کنیم به ازاء $\tau>0$ همچنان صفر باقی خواهد ماند.

این نکته نشان می‌دهد که فقط مجموع اول در تعیین عبارت $R_{si_x}(\tau+\lambda)\,U(\tau)$ نقش دارد. به عبارت دیگر

$$R_{si_x}(\tau+\lambda)\,U(\tau)=[a_1 e^{s_1(\tau+\lambda)}+\ldots\ldots+a_n e^{s_n(\tau+\lambda)}]\,U(\tau)$$

تبدیل این معادله عبارت است از

$$S^{+}_{\lambda}(s)=\frac{a_1 e^{s_1\lambda}}{s-s_1}+\ldots\ldots+\frac{a_n e^{s_n\lambda}}{s-s_n} \qquad (۸-۸۵)$$

مثال ۷-۸

فرض کنید که $X(t)=S(t)+\gamma(t)$ بوده و مانند مثال ۱-۸

$$S_{ss}(\omega)=\frac{N_0}{\alpha^2+\omega^2}\ ,\ S_{\gamma\gamma}(\omega)=N\ ,\ \ S_{s\gamma}(\omega)=0 \qquad (۸-۸۶)$$

در این حالت، $S_{sx}(s)=S_{ss}(s)$ بوده و

$$S_{xx}(s)=\frac{N_0}{\alpha^2-s^2}+N=N\,\frac{\beta^2-s^2}{\alpha^2-s^2}\ ,\ \beta^2=\alpha^2+\frac{N_0}{N}$$

بنابراین

$$L_x(s)=\sqrt{N}\ \frac{s+\beta}{s+\alpha} \qquad \Gamma_x(-s)=\frac{1}{\sqrt{N}}\ \frac{\alpha-s}{\beta-s} \qquad (۸-۸۷)$$

با جایگذاری در (۷۹–۸) و بسط کسرهای جزئی، می‌توان نوشت

$$S_{si_x}(s) = \frac{N_\circ}{\alpha^{۲} - s^{۲}} \; \frac{\alpha - s}{(\beta - s)\sqrt{N}} = \frac{A}{s+\alpha} - \frac{A}{s-\beta}$$

$$, \; A = \frac{N_\circ}{(\alpha+\beta)\sqrt{N}}$$

و با $s_۱ = -\alpha$ (رابطهٔ ۸۵–۸) داریم

$$S_\lambda^+(s) = \frac{A}{s+\alpha} e^{-\alpha\lambda}$$

بنابراین

$$H_x(s) = S_\lambda^+(s)\;\Gamma_x(s) = \frac{\beta-\alpha}{s+\beta} e^{-\alpha\lambda} \qquad (۸–۸۸)$$

باید توجه کرد که در تجزیهٔ $S_\lambda(s)$ بر اساس رابطهٔ (۸۲–۸)، به توابع

$S_\lambda^+(s)$ و $S_\lambda^-(s)$ می‌توان مقدار ثابتی افزوده و کم کرد.

این نکته در تعیین $h_{i_x}(t)$ سبب ابهام می‌گردد.

برای رفع ابهام شرط زیر را اعمال می‌کنیم

$$S_\lambda^-(\infty) = ۰$$

در مورد فیلترینگ خالص $(\lambda = ۰)$، $h_x(t)$

حاصله می‌تواند شامل ایمپالس هایی در مبدأ باشد. این امر قابل قبول است

چون، بنا به فرض، تخمین $\hat{S}(t)$ از $S(t)$

تابعی از مقدار گذشته و حال داده های $X(t)$ است.

فیلترینگ نویز سفید

در حالت فیلترینگ خالص اگر $R_{ss}(0) < \infty$

باشد، تعیین تخمین گر $H_x(s)$ امری ساده خواهد بود.

در این مورد $\gamma(t)$ نویز سفید و متعامد بر سیگنال بر طبق (۸-۸۶) است.

در حقیقت می‌توان نشان داد که

$$H_x(s) = 1 - \sqrt{N}\;\Gamma_x(s) \qquad (۸\text{-}۸۹)$$

که در آن $\Gamma_x(s)$ فیلتر سفید کنندهٔ $X(t)$ است.

برای اثبات باید گفت که بر اساس فرضیات می‌توان نتیجه گرفت

$S_{ss}(\infty) = 0$ ، بنابراین

$$S_{sx}(s) = S_{ss}(s) = S_{xx}(s) - N = L_x(s)\,L_x(-s) - N$$

$$S_{sx}(\infty) = 0 \qquad S_{xx}(\infty) = N \qquad L_x(\pm\infty) = \sqrt{N}$$

با جایگذاری در (۸-۷۹)، داریم

$$S_{si_x}(s) = L_x(s) - N\Gamma_x(-s) = L_x(s) + K - N\Gamma_x(-s) - K$$

با توجه به نکتهٔ مطرح شده دربارهٔ رفع ابهام از تجزیهٔ $S_\lambda(s)$،

باید گفت که ثابت K به نحوی تعیین می‌گردد که مؤلفهٔ غیر علّی $S_{si_x}(s)$

شرط بی نهایت $-N\Gamma_x(-\infty) - K = 0$ را اقناع نماید.

از آن جا که

$$\Gamma_x(-\infty) = \frac{1}{L_x(-\infty)} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

می باشد، رابطهٔ (۸-۸۹) را می‌توان از (۸-۸۰) نتیجه گرفت.

مثال ۸–۸

می‌خواهیم فیلتر خالص فرآیند مثال ۷–۸ را تعیین کنیم.

با استفاده از روابط (۸۷–۸) و (۸۹–۸) می‌توان نوشت

$$H_x(s) = 1 - \frac{\alpha + s}{\beta + s} = \frac{\beta - \alpha}{s + \beta} \quad , \; h_x(t) = (\beta - \alpha)\, e^{-\beta t}\, U(t)$$

که با رابطهٔ (۸۸–۸) هماهنگ است.

توجه کنید که خطای MS حاصله برابر است با

$$P = E\{[S(t) - \int_0^\infty h_x(\alpha)\, X(t-\alpha)\, d\alpha]\, S(t)\} = \frac{N_0}{\alpha + \beta}$$

فرآیندهای گسسته زمان

در این بخش به طور مختصر مورد گسسته زمان نتایج قبل را بررسی می‌کنیم.

مسأله ما، اکنون، تعیین مقدار آتی $S[n+r]$

فرآیند اتفاقی برحسب مقادیر حال و گذشتهٔ فرآیند دیگری مانند $X[n]$ است.

$$\hat{S}[n+r] = \sum_{k=0}^{\infty} h_x^r[k]\, X[n-k] \qquad (۸–۹۰)$$

در این مورد

$$S[n+r] - \hat{S}_r[n+r] \perp X[n-m] \quad , \quad m \geq 0$$

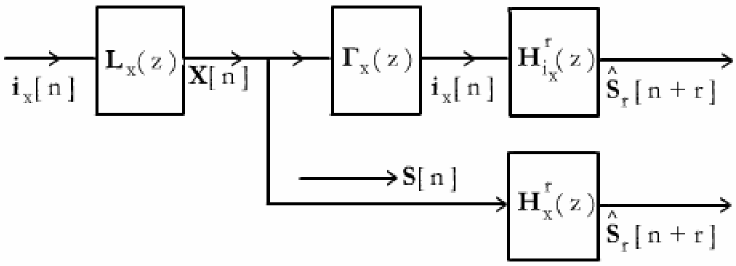
بنابراین

$$R_{sx}[m+r] = \sum_{k=0}^{\infty} h_x^r[k]\, R_{xx}[m-k] \quad , \; m \geq 0 \qquad (۸–۹۱)$$

رابطهٔ فوق در واقع نسخه گسسته معادلهٔ وینر- هاف است (رابطهٔ ۷۳-۸)

برای تعیین $h_x^r[n]$ ، مانند مورد آنالوگ عمل می‌کنیم. $\hat{S}_r[n+r]$

را می‌توان بر حسب ابداع $i_x[n]$ مربوط به $X[n]$ بیان کرد (شکل ۱۱-۸)

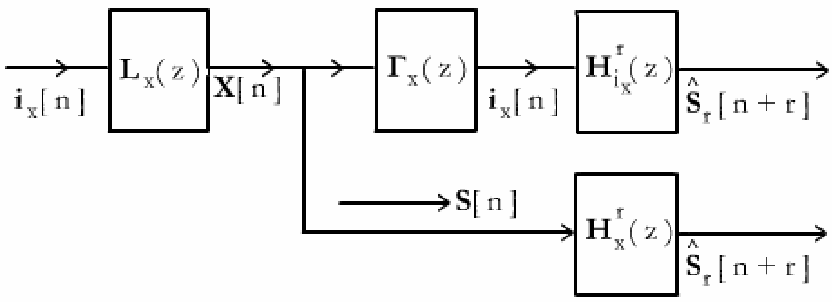


(شکل ۱۱-۸)

$$\hat{S}_r[n+r]=\sum_{k=0}^{\infty} h^r_{i_x}[k]\, i_x[n-k] \qquad (۸-۹۲)$$

با استناد به رابطهٔ فوق و اصل تعامد می‌توان نوشت

$$R_{si_x}[m+r]=\sum_{k=0}^{\infty} h^r_{i_x}[k]\,\delta[m-k]=h^r_{i_x}[m] \quad , \quad m\geq 0$$



(شکل ۱۱-۸)

چون $R_{i_x}[m] = \delta[m]$ می‌باشد. پس

$$h^r_{i_x}[m] = R_{si_x}[m+r]\,U[m] \quad , \quad \text{به ازاء تمام مقادیر } m \qquad (۸-۹۳)$$

تابع $R_{si_x}[m]$ را می‌توان بر حسب $R_{sx}[m]$ مانند رابطهٔ (۸-۷۹) بیان کرد.

$$S_{si_x}(z) = S_{sx}(z)\,\Gamma_x(z^{-1}) \qquad (۸-۹۴)$$

بنابراین تبدیل $R_{si_x}[m+r]$ برابر است با

$$S_r(z) = z^r S_{si_x}(z) = z^r\, S_{sx}(z)\,\Gamma_x(z^{-1}) \qquad (۸-۹۵)$$

پس تابع $S_r(z)$ را می‌توان به صورت مجموع زیر نوشت

$$S_r(z) = S_r^+(z) + S_r^-(z) \qquad (۸-۹۶)$$

که در آن $S_r^+(z)$ به ازاء $|z| > ۱$ تحلیلی بوده و $S_r^-(z)$ به ازاء $|z| < ۱$ تحلیلی است.

علاوه بر آن، معکوس $S_r^-(z)$ در مبدأ صفر است. بنابراین $S_r^+(z)$ تبدیل تابع علّی

$$R_{si_x}[m+r]\,U[m]$$

می‌باشد.

و از آن جا که $i_x[n]$ پاسخ فیلتر سفید کنندهٔ $\Gamma_x(z)$ با ورودی $X[n]$ است، نتیجه می‌گیریم که

$$H^r_x(z) = H^r_{i_x}(z)\,\Gamma_x(z) = S_r^+(z)\,\Gamma_x(z) \qquad (۸-۹۷)$$

مثال ۹–۸

در این مثال پیش بینی تک پله ای $\hat{S}_1[n+1]$ فرآیند $S[n]$
را با مشخصات زیر تعیین می‌کنیم

$$S_{ss}(z) = \frac{N_0}{(1 - a z^{-1})(1 - a z)} \quad , \quad S_{\gamma\gamma}(z) = N \quad , \quad S_{S\gamma}(z) = 0$$

در این مورد (مثال ۲–۸ را ببینید)

$$L_x(z) = \sqrt{\frac{N a}{b}} \; \frac{1 - b z^{-1}}{1 - a z^{-1}}$$

با توجه به رابطهٔ (۹۵–۸) می‌توان گفت که به ازاء $r = 1$

$$z S_{si_x}(z) = \frac{z N_0 \sqrt{b / N a}}{(1 - a z^{-1})(1 - b z)}$$

$$= \frac{Aaz}{z - a} - \frac{A z / b}{z - 1 / b} \; , \; A = (a - b)\sqrt{\frac{N}{ab}}$$

از آن جا که $1 < a < 0$ و $1 < \frac{1}{b}$ است، نتیجه می‌گیریم که بر اساس رابطهٔ بالا

$$S_r^+(z) = Aaz / (z - a)$$

بوده و رابطهٔ (۹۷–۸) به صورت زیر در می‌آید

$$H_x^1(z) = (a - b)\frac{z}{z - b} \quad , \quad h_x^1[n] = (a - b) b^n U[n]$$

$$z\,S_{si_x}(z) = \frac{z\,N_0\sqrt{b/Na}}{(1 - a z^{-1})(1 - b z)}$$

$$= \frac{Aaz}{z-a} - \frac{Az/b}{z - 1/b}\ ,\quad A = (a-b)\sqrt{\frac{N}{ab}}$$

از آن جا که $0 < a < 1$ و $\frac{1}{b} > 1$ است، نتیجه می‌گیریم که بر اساس رابطهٔ بالا

$$S_r^{+}(z) = Aaz/(z-a)$$

بوده و رابطهٔ (۹۷-۸) به صورت زیر در می‌آید

$$H_x^{1}(z) = (a-b)\frac{z}{z-b}\quad ,\quad h_x^{1}[n] = (a-b)\,b^{n}\,U[n]$$

در ادامه این بررسی، روش مستقیم تری برای تعیین $H_x^{r}(z)$ ارائه خواهیم نمود

نویز سفید

ماهیت پیش بینی $H_x^{r}(z)$ مربوط به $S[n+r]$

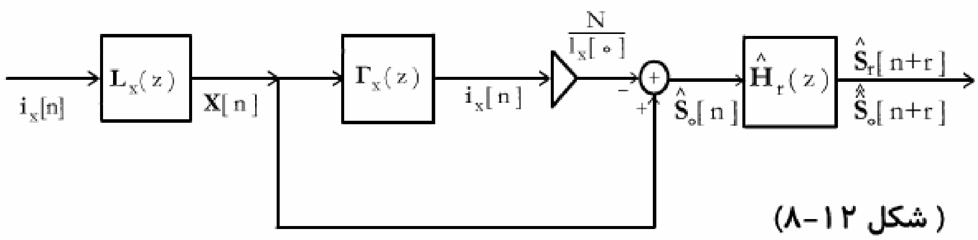
را تحت شرایط نویز سفید و متعامد بر سیگنال بررسی می‌نمائیم

$$R_{\gamma\gamma}[m] = N\,\delta[m]\quad ,\quad R_{S\gamma}[m] = 0 \qquad (۸\text{-}۹۸)$$

i) فیلتر خالص: ابتدا فرض کنید که $r = 0$ است.

در این حالت $H_x^{0}(z)$ فیلتر خالص بوده و $\hat{S}_0[n]$ تخمین سیگنال $S[n]$

برحسب $X[n]$ و گذشتهٔ آن است. می‌توان نشان داد که (شکل ۱۲-۸)



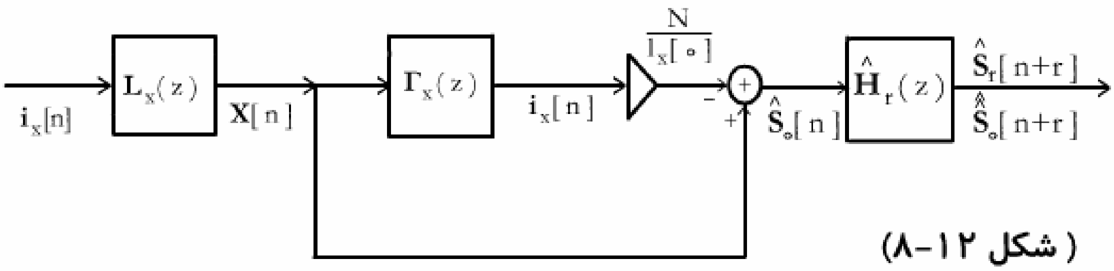
(شکل ۱۲-۸)

$$H^{\circ}_{x}(z) = 1 - \frac{D}{L_x(z)} \quad , \quad D = \frac{N}{l_x(\circ)} \qquad (۸-۹۹)$$

برای اثبات باید گفت با توجه به (۸-۹۸) داریم

$$S_{sx}(z) = S_{ss}(z) = S_{xx}(z) - N = L_x(z)\,L_x(z^{-1}) - N$$

با جایگذاری نتیجه فوق در رابطهٔ (۸-۹۴) می‌توان نوشت



(شکل ۸-۱۲)

$$S_{si_x}(z) = L_x(z) - N\,\Gamma_x(z^{-1}) \qquad (۸-۱۰۰)$$

می‌خواهیم مؤلفهٔ علّی عبارت فوق را که شامل مقدار معکوس آن در $n = \circ$ باشد، به دست آوریم. از آن جا که تبدیل Z معکوس $\Gamma_x(1/z)$ به ازاء $n > \circ$ برابر صفر بوده و به ازاء $n = \circ$ با $\Gamma_x(\infty)$ برابر است ، نتیجه می‌گیریم که

$$H^{\circ}_{i_x}(z) = L_x(z) - N\,\Gamma_x(\infty) \qquad (۸-۱۰۱)$$

بوده و با ضرب طرفین آن در $\Gamma_x(z)$ ، رابطهٔ (۹۹–۸) به دست می‌آید

چون

$$\Gamma_x(\infty) = \frac{1}{l_x[0]}$$

ii) فیلترینگ و پیش بینی: اکنون نشان می‌دهیم که تخمین $\hat{S}_r[n+r]$ از $S[n+r]$ برابر است با پیش بینی خالص $\hat{\hat{S}}_0[n+r]$ از تخمین $\hat{S}_0[n]$ از $S[n]$ (شکل ۱۲–۸)

$$\hat{S}_r[n+r]=\hat{\hat{S}}_0[n+r]=\hat{E}\{\hat{S}_0[n+r]/\hat{S}_0[n-k], k\geq 0\} \quad (۸–۱۰۲)$$

برای اثبات، می‌توان گفت که با توجه به روابط (۱۰۰–۸) و (۹۵–۸) داریم

$$S_r(z) = z^r[L_x(z) - N\,\Gamma_x(z^{-1})]$$

ولی معکوس $z^r\Gamma_x(1/z)$ به ازاء $n \geq 0$ برابر صفر است.

بنابراین $S_r^+(z)$ مؤلفهٔ علّی $z^r L_x(z)$ می‌باشد

با جایگذاری در (۹۷–۸) داریم

$$H_x^r(z) = z^r\left(L_x(z) - \sum_{k=0}^{r-1} l_x[k]\,z^{-k}\right)\Gamma_x(z)$$

$$= z^r\left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{r-1} l_x[k]\,z^{-k}}{\Gamma_x(z)}\right) \quad (۸–۱۰۳)$$

همان طور که در شکل ۱۲–۸ مشاهده می‌کنیم،

فیلتر ابداع $\hat{S}_{\circ}[n]$ برابر $L_x(z)\,H_x^{\circ}(z)$ است. برای تعیین پیش بینی خالص $\hat{H}_r(z)$ مربوط به $\hat{S}_{\circ}[n+r]$، کافی است که رابطهٔ (۳۷–۸) را در z^r ضرب کنیم (اکنون آینده را پیش بینی می‌کنیم) و به جای تابع $L(z)$ تابع $L_x(z)\,H_x^{\circ}(z)$ را قرار دهیم. در این صورت

$$\hat{H}_r(z) = z^r\left(1 - \frac{\sum_{k=\circ}^{r-1} l_x[k]\,z^{-k} - D}{L_x(z) - D}\right)$$

چون معکوس $L_x(z) - D$ برابر $l_x[n] - D\,\delta[n]$ می‌باشد. از مقایسه با رابطه (۱۰۳–۸) نتیجه می‌گیریم که

$$H_x^{r}(z) = H_x^{\circ}(z)\,\hat{H}_r(z)$$

بحث فوق به نتایج مهّم زیر، با توجه به فرض نویز سفید (رابطهٔ ۹۸–۸)، منجر می‌شود:

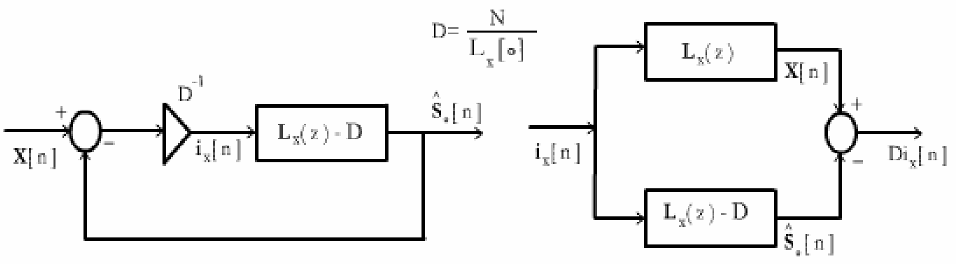
۱- ابداع $i_x[n]$ مربوط به $X[n]$ با تفاضل $X[n] - \hat{S}_{\circ}[n]$ متناسب است.

$$X[n] - \hat{S}_{\circ}[n] = D\,i_x[n] \quad , \quad D = \frac{N}{l_x[n]} \qquad (۸–۱۰۴)$$

در واقع، $X[n] - \hat{S}_{\circ}[n]$ خروجی فیلتر

$$L_x(z) - [L_x(z) - D] = D$$

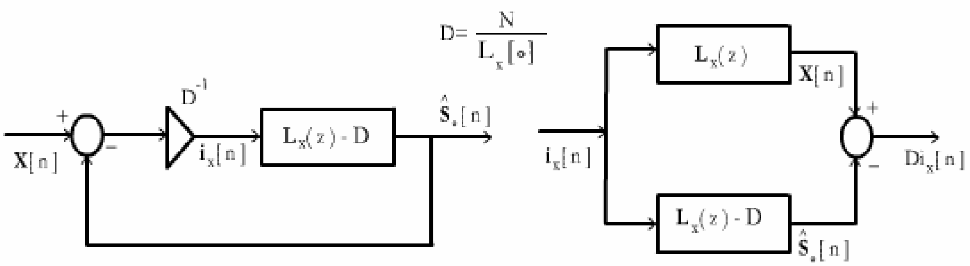
با ورودی $i_x[n]$ است (شکل ۱۳–۸ الف).



(الف) (شکل ۱۳-۸) (ب)

بنابراین فرآیند $i_x[n]$ را می‌توان به سهولت با استفاده از سیستم فیدبک (شکل ۱۳-۸ ب) که فقط شامل فیلتر $H^{\circ}_{i_x}(z)$ می‌باشد تحقق بخشید.

۲ - تخمین فیلترینگ و پیش بینی r پله ای $\hat{S}_{\circ}[n+r]$ را می‌توان از اتصال متوالی فیلتر خالص $H^{\circ}_{x}(z)$ مربوط به $S[n]$ با پیش بینی خالص $\hat{H}_r(z)$ مربوط به $\hat{S}_{\circ}[n+r]$ ، به دست آورد



(الف) (شکل ۱۳-۸) (ب)

۳ - اگر سیگنال $S[n]$ فرآیند ARMA باشد، آن گاه، تخمین آن $\hat{S}_{\circ}[n]$ نیز فرآیند ARMA خواهد بود.

در واقع اگر

$$L_x(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$$

گویا باشد، در آن صورت (رابطهٔ ۹۹-۸ را ببینید)، فیلتر $H^{\circ}_{x}(z)$ نیز گویا خواهد بود.

علاوه بر آن، مخرج $B(z)$ کسر $L_x(z)$ همان مخرج بخش مستقیم $D - L_x(z)$ در تحقق فیدبک $H_x^{\circ}(z)$ نشان داده شده در شکل ۱۳-۸ ب خواهد بود.

نتایج فوق، نقش اساسی در تعریف و توسعه نظریه فیلترهای کالمن (Kalman) را ایفاء می‌نمایند.

مسائل فصل ۸

۱-۸ فرض کنید که

$$\hat{E}\{S(t-\frac{T}{2})/S(t), S(t-T)\} = a\,S(t) + b\,S(t-T), \quad R_s(\tau) = I\,e^{-|\tau|/T}$$

می‌باشد. ضرایب ثابت a , b و خطای MS را تعیین کنید.

۲-۸ نشان دهید که اگر

$$\hat{Z} = a\,S(0) + b\,S(T)$$

تخمین MS متغیر Z زیر باشد

$$Z = \int_0^T S(t)\,dt$$

آن‌گاه

$$a = b = \frac{\int_0^T R_s(\tau)\,d\tau}{R_s(0) + R_s(T)}$$

خواهد بود.

۸-۳ ثابت کنید که اگر

$$S_{s\gamma}(\tau) = ٠ \;,\; X(t) = S(t) + \gamma(t)$$

و

$$\hat{E}\{ S'(t) / X(t), X(t-\tau)\} = a\,X(t) + b\,X(t-\tau)$$

باشد در آن صورت به ازاء مقادیر کوچک τ

$$a = -b \simeq R''_{ss}(٠) / \tau\, R''_{xx}(٠)$$

می‌باشد.

۸-۴ اگر به ازاء $|\omega| > \sigma = \frac{\pi}{T}$ ، $S_x(\omega) = ٠$ **باشد،**
ثابت کنید که تخمین خطی MS فرآیند $X(t)$ **برحسب نمونه های آن**
$X(nT)$ **برابر است با**

$$\hat{E}\{ X(t)/X(nT), n = -\infty, \dots, \infty \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\sigma t - nT)}{\sigma t - n\pi} X(nT)$$

و خطای MS برابرصفر است.

۸-۵ نشان دهید که اگر

$$\hat{E}\{ S(t+\lambda) / S(t), S(t-\tau)\} = \hat{E}\{ S(t+\lambda) / S(t) \}$$

باشدآن گاه $R_s(\tau) = I\, e^{-\alpha|\tau|}$ **خواهد بود.**

۸-۶ دنبالهٔ تصادفی X_n را هنگامی مارتینگل (Martingale) می‌نامند که $E\{X_n\} = 0$ بوده و

$$E\{X_n / X_{n-1}, \ldots, X_1\} = X_{n-1}$$

نشان دهید که اگر متغیرهای تصادفی Y_n مستقل باشند، آن گاه مجموع آنها

$$X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$$

مارتینگل خواهد بود.

۸-۷ دنبالهٔ تصادفی X_n را هنگامی مارتینگل به مفهوم ضعیف می‌نامند که

$$\hat{E}\{X_n / X_{n-1}, \ldots, X_1\} = X_{n-1}$$

الف) نشان دهید که دنبالهٔ X_n مارتینگل به مفهوم ضعیف خواهد بود اگر آن را به صورت مجموع

$$X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$$

تعریف کرده و متغیرهای تصادفی Y_n متعامد باشند.

ب) نشان دهید که اگر دنبالهٔ X_n مارتینگل به مفهوم ضعیف باشد، در آن صورت

$$E\{X_n^2\} \geq E\{X_{n-1}^2\} \geq \ldots \geq E\{X_1^2\}$$

{**راهنمایی:** $X_n - X_{n-1} \perp X_{n-1}, \; X_n = X_n - X_{n-1} + X_{n-1}$ }

۸-۸ تخمین‌گرهای غیر علّی $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$ را که به ترتیب فرآیند $S(t)$ و مشتق آن $S'(t)$ را برحسب داده های

$$X(t) = S(t) + \gamma(t)$$

تخمین می‌زنند به دست آورید. ضمناً فرض کنید

$$R_s(\tau) = A\frac{\sin^2 a\tau}{\tau^2}\ ,\ R_{s\gamma}(\tau) = 0\ ,\ R_\gamma(\tau) = N\,\delta(\tau)$$

۹-۸ نشان دهید که اگر

$$S(\omega) = \frac{1}{1+\omega^4}$$

باشد، آن گاه پیش بینی کنندهٔ $S(t)$ برحسب گذشتهٔ کامل آن برابر است با

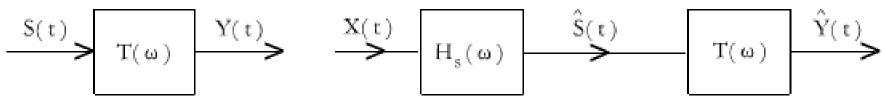
$$\hat{S}(t+\lambda) = b_0 S(t) + b_1 S'(t)$$

که در آن

$$b_0 = e^{\frac{-\lambda}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)\ ,\ b_1 = \sqrt{2}\ e^{\frac{-\lambda}{\sqrt{2}}}\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

۸-۱۰ سیستم $T(\omega)$ با ورودی $S(t)$ و خروجی $Y(t)$ مفروض است.
اگر تخمین‌گرهای غیر علّی $H_s(\omega)$ و $H_y(\omega)$
به ترتیب تخمین $S(t)$ و $Y(t)$ را برحسب داده های $X(t)$
(شکل م ۱۰-۸) را محاسبه کنند، نشان دهید که

$$H_y(\omega) = H_s(\omega)\,T(\omega)$$



شکل م ۱۰-۸

۸-۱۱ (الف) دنبالهٔ h_n را به نحوی تعیین کنید که سیستم زیر را اقناع کند.

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k R_{m-k} = R_{m+1} \;,\; m \geq 0 \quad,\quad R_m = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}$$

(ب) تابع $H(z)$ تابعی گویا با قطبهایی داخل دایرهٔ واحد است.
تابع $Y(z)$ تابعی گویا با قطبهای خارج دایرهٔ واحد می‌باشد. با فرض

$$[H(z) - z]\,\frac{70 - 25(z + z^{-1})}{6(z + z^{-1})^2 - 35(z + z^{-1}) + 50} = Y(z)$$

توابع $H(z)$ و $Y(z)$ را به دست آورید.
(ج) در مورد ارتباط دو بند (الف) و (ب) فوق بحث کنید.