فصل ۷ توصیف طیفی

۱-۷ فاکتوربندی و ابداع

در این بخش، مسأله توصیف فرآیند WSS حقیقی $X(t)$ ، به عنوان پاسخ سیستم حداقل فاز (Minimum Phase) $L(s)$ به ورودی نویز سفید $i(t)$ را، بررسی می‌کنیم .

عبارت حداقل فاز دارای مفهوم و معنی زیر است :

سیستم $L(s)$ علّی بوده و پاسخ ضربه آن $l(t)$ انرژی محدود دارد، سیستم $\Gamma(s)=1/L(s)$ علّی بوده و پاسخ ضربه آن $\gamma(t)$ دارای انرژی محدود است .

بنابراین سیستم $L(s)$ هنگامی حداقل فاز است که توابع $L(s)$ و $1/L(s)$ در نیم صفحه راست لاپلاس یا $R_e(s)>0$ تحلیلی هستند .

فرآیند $X(t)$ را که بتوان بدین صورت توصیف کرد فرآیند عادی (Regular) نامند.
با توجه به تعریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که $X(t)$ زمانی فرآیند عادی خواهد بود که آن با فرآیند نویز سفید $i(t)$ معادل خطی باشد (شکل ۱-۷)

فیلتر سفید کننده : $\Gamma(s)$

فیلتر ابداع : $L(s)$

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\gamma(t) \longleftrightarrow \Gamma(s)} \xrightarrow{\;i(t)\;} \boxed{l(t) \longleftrightarrow L(s)} \longrightarrow X(t)$$

(شکل ۱-۷)

$$i(t)=\int_{0}^{\infty}\gamma(\alpha)X(t-\alpha)\,d\alpha \quad , \quad R_{ii}(\tau)=\delta(\tau) \qquad (۷-۱)$$

$$X(t)=\int_{0}^{\infty}l(\alpha)\,i(t-\alpha)\,d\alpha \ , \ E\{X^{۲}(t)\}=\int_{0}^{\infty}l^{۲}(t)\,dt<\infty \qquad (۷-۲)$$

رابطه دوم فوق نشان می‌دهد که طیف توان $S(s)$ فرآیند عادی را
می‌توان به صورت
حاصلضرب

$$S(s)=L(s)L(-s) \quad ، \quad S(\omega)=|L(j\omega)|^{۲} \qquad (۷-۳)$$

بیان کرد که در آن $L(s)$ تابع حداقل فاز بوده و به نحو یکتا
برحسب $S(\omega)$ تعیین می‌شود .

تابع $L(s)$ را فیلتر ابداع $X(t)$ (Innovations) و تابع معکوس آن یعنی
$\Gamma(s)$ را فیلتر سفید کننده $X(t)$ (Whitening) نامند .
فرآیند $i(t)$ را ابداع $X(t)$ گویند.
فرآیند مذکور خروجی فیلتر $L(s)$ با ورودی $X(t)$ می‌باشد.
روش تعیین تابع $L(s)$ به شرح زیر است :

فرض کنید تابع زوج مثبت $S(\omega)$ با سطح محدود در دست است ،
تابع حداقل فاز $L(s)$ را به نحوی تعیین کنید که
$|L(j\omega)|^{۲}=S(\omega)$ باشد .
می‌توان نشان داد که این مسأله جوابی خواهد داشت مشروط بر آنکه
$S(\omega)$ در معیار پالی- وینر (Paley-Wiener) صدق کند.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log S(\omega)|}{۱+\omega^{۲}}\,d\omega<\infty \qquad (۷-۴)$$

اگر $S(\omega)$ مرکب از خطوط طیفی باشد و یا به طور کلی باند محدود باشد
شرط فوق اقناع نمی‌شود .
همان گونه که بعداً نشان خواهیم داد ، فرآیند هایی با چنین طیف هایی
قابل پیش بینی هستند .

به طور کلی ، مسأله فاکتوربندی $S(\omega)$ به شکل رابطهٔ (۳-۷) امر ساده ای نیست.

در سطور زیرین مورد خاص‌مهمّی را بررسی می‌کنیم.

طیف گویا نسبت دو چند جمله ای برحسب ω^2 است

چون $S(-\omega)=S(\omega)$ می‌باشد.

$$S(\omega)=\frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)} \quad , \quad S(s)=\frac{A(-s^2)}{B(-s^2)} \qquad (۷-۵)$$

این رابطه نشان می‌دهد که اگر s_i یک ریشه (قطب یا صفر) $S(s)$ باشد ، $-s_i$ نیز یک ریشه دیگر آن خواهد بود.

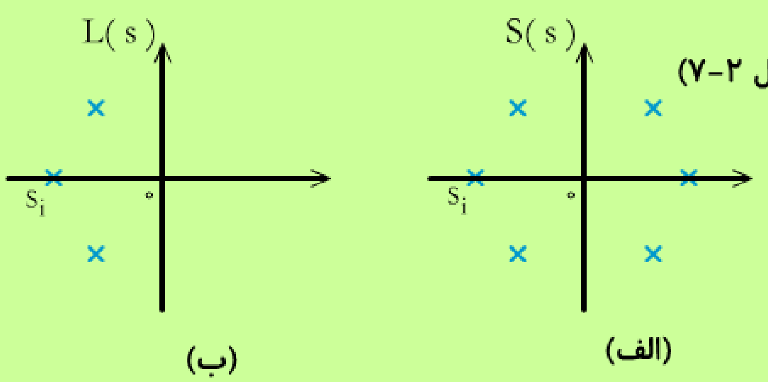
علاوه بر آن ، تمام ریشه‌ها حقیقی یا مختلط مزدوج یکدیگر هستند .

پس می‌توان گفت که ریشه‌های $S(s)$ نسبت به محور $j\omega$ متقارن هستند (شکل ۲-۷ الف)

بنابراین می‌توان آن‌ها را به دو گروه تقسیم کرد .

گروه "چپ" از تمام ریشه‌های s_i با $R_e(s_i)<0$ تشکیل یافته و

گروه "راست" مرکب از تمام ریشه‌ها با $R_e(s_i)>0$ می‌باشد .



(شکل ۲-۷)

فاکتور حداقل فاز $L(s)$ حاصل از $S(s)$ نسبت دو چند جمله ای متشکل از ریشه‌های چپ $S(s)$ خواهد بود .

$$S(s)=\frac{N(s)N(-s)}{D(s)D(-s)}\ ,\quad L(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\ ,\quad L^2(0)=S(0)$$

مثال ۱–۷

(الف) اگر $S(\omega)=\dfrac{N}{\alpha^2+\omega^2}$ **باشد در آن صورت**

$$S(s)=\frac{N}{\alpha^2-s^2}=\frac{N}{(\alpha+s)(\alpha-s)}\ ,\quad L(s)=\frac{\sqrt{N}}{\alpha+s}$$

(ب) اگر $S(\omega)=\dfrac{49+25\omega^2}{\omega^4+10\omega^2+9}$ **باشد آن گاه**

$$S(s)=\frac{49-25s^2}{(1-s^2)(9-s^2)}\ ,\quad L(s)=\frac{7+5s}{(1+s)(3+s)}$$

(ج) اگر $S(\omega)=\dfrac{25}{\omega^4+1}$ **باشد آن گاه**

$$S(s)=\frac{25}{s^4+1}=\frac{25}{(s^2+\sqrt{2}\,s+1)(s^2-\sqrt{2}\,s+1)}$$

$$L(s)=\frac{5}{s^2+\sqrt{2}\,s+1}$$

فرآیندهای گسسته زمان

سیستم گسسته زمان هنگامی حداقل فاز است که تابع سیستم آن $L(z)$ و معکوس آن $\Gamma(z)=1/L(z)$ در بیرون دایرهٔ واحد یعنی $|z|>1$ تحلیلی باشد .

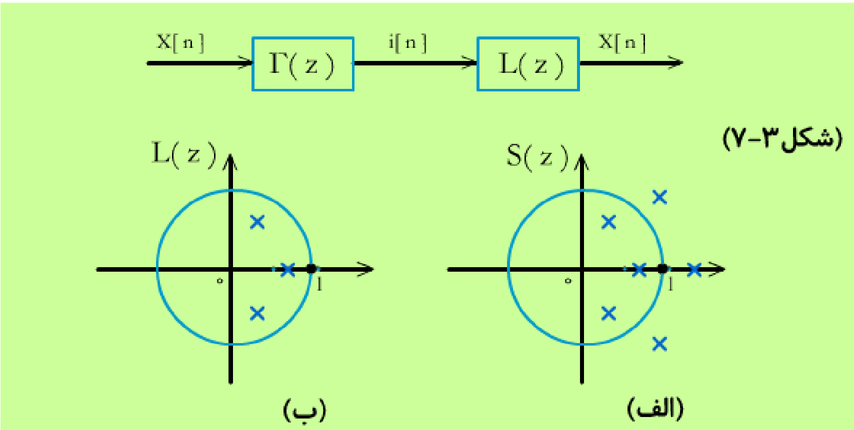
فرآیند دیجیتال WSS حقیقی $X[n]$ هنگامی عادی است که طیف آن $S(z)$ را بتوان به صورت حاصلضرب زیر نوشت

$$S(z)=L(z)L(z^{-1}) \quad , \quad S(e^{j\omega})=|L(e^{j\omega})|^2 \qquad (۷-۶)$$

با توصیف پاسخ ضربه $\Gamma(z), L(z)$ به صورت $\gamma[n], l[n]$ ، نتیجه می‌گیریم که فرآیند عادی $X[n]$ با فرآیند نویز سفید $i[n]$ معادل خطی است . شکل (۳-۷)

$$i[n]=\sum \gamma[k]X[n-k] \quad , \quad R_{ii}[m]=\delta[m] \qquad (۷-۷)$$

$$X[n]=\sum_{k=0}^{\infty} l[k]\, i[n-k] \quad , \quad E\{X^2[n]\}=\sum_{k=0}^{\infty} l^2[k]<\infty \qquad (۷-۸)$$



(شکل۳-۷)

فرآیند $i[n]$ ابداع $X[n]$ و تابع $L(z)$ فیلتر ابداع آن است .

فیلتر سفید کننده $X[n]$ تابع $\Gamma(z)=\frac{1}{L[z]}$ است .

می‌توان نشان داد که طیف توان $S(e^{j\omega})$ مربوط به فرآیند $X[n]$ را می‌توان به صورت رابطهٔ (۶-۷) فاکتوربندی کرد .

مشروط بر آنکه در معیار پالي- وينر صدق کند.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log S(\omega)d\omega| < \infty \qquad (۷-۹)$$

اگر طیف توان $S(\omega)$ تابع قابل انتگرال‌گیری باشد در آن صورت رابطهٔ فوق به صورت رابطهٔ زیر در می‌آید.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln S(\omega)d\omega > -\infty$$

طیف توان $S(e^{j\omega})$ فرآیند حقیقی تابعی از $\cos\omega=(e^{j\omega}+e^{-j\omega})/2$ است .

با توجه به این نکته می‌توان گفت که $S(z)$ تابعی از $z+z^{-1}$ می‌باشد .

بنابراین اگر z_i یک ریشهٔ $S(z)$ باشد z_i^{-1} نیز ریشهٔ دیگر آن خواهد بود .

بنابراین نتیجه می‌گیریم که ریشه‌های $S(z)$ نسبت به دایرهٔ واحد متقارن هستند . (شکل۳-۷)

بنابراین ریشه‌ها را می‌توان به دو گروه تجزیه کرد .

گروه "درونی" از تمام ریشه‌های z_i که $|z_i| < 1$ است تشکیل یافته و
گروه "بیرونی" مرکب از تمام ریشه‌های z_i که $|z_i| > 1$ است می‌باشد.
$L(z)$ یعنی فاکتور حداقل فاز $S(z)$ نسبت دو چند جمله ای مرکب از ریشه‌های درونی $S(z)$ است

$$S(z)=\frac{N(z)N(z^{-1})}{D(z)D(z^{-1})} \quad , \quad L(z)=\frac{N(z)}{D(z)} \quad , \quad L^{2}(1)=S(1)$$

مثال ۲-۷

اگر $S(\omega)=\dfrac{(5-4\cos\omega)}{(10-6\cos\omega)}$ **باشد، آن گاه ،**

$$S(z)=\frac{5-2(z+z^{-1})}{10-3(z+z^{-1})}=\frac{2(z-2)(z-\frac{1}{2})}{3(z-3)(z-\frac{1}{3})}$$

$$L(z)=\frac{2z-1}{3z-1}$$

۲-۷ سیستم های مرتبهٔ محدود و متغیرهای حالت

در این بخش ، سیستم‌هایی را که توسط معادلات دیفرانسیل یا معادلات تکراری مشخص و توصیف می‌شوند ، مورد بررسی قرار می‌دهیم .
به عنوان مقدمه ، به طور مختصر مفهوم سیستم‌های مرتبهٔ محدود و متغیرهای حالت را مطالعه کرده و از مورد آنالوگ شروع می‌کنیم .
سیستم‌های تحت بررسی ، چند ترمینالی با m ورودی $X_i(t)$ و r خروجی $Y_j(t)$ ، که بردارهای ستونی $\mathbf{X}(t)=\{X_i(t)\}$ و $\mathbf{Y}(t)=\{Y_j(t)\}$ را تشکیل می‌دهند ، می‌باشند.
در یک لحظهٔ به‌خصوص مانند $t=t_1$، خروجی $\mathbf{Y}(t)$ سیستم به طور کلی هنگامی مشخص است که فقط ورودی $\mathbf{X}(t)$ به ازاء جمیع مقادیر t معلوم و شناخته شده باشد .

بنابراین به منظور تعیین $\mathbf{Y}(t)$ به ازاء $t > t_0$ ، باید $\mathbf{X}(t)$ را به ازاء $t \le t_0$ و $t > t_0$ بشناسیم . برای طبقهٔ خاصی از سیستم‌ها ، این شرط ضروری نیست.

اگر $\mathbf{X}(t)$ را به ازاء $t > t_0$ و علاوه بر آن ، مقادیر تعداد محدودی از پارامترها را بشناسیم ، در آن صورت مقادیر $\mathbf{Y}(t)$ به ازاء $t > t_0$ به طور کامل قابل تعیین است.

پارامترهای مذکور حالت سیستم را در $t = t_0$ مشخص کرده و مقادیر آن‌ها اثر گذشته $t < t_0$ مربوط به $\mathbf{X}(t)$ را بر روی آینده $t > t_0$ مربوط به $\mathbf{Y}(t)$ ، مشخص و تعیین می‌نماید .

مقادیر این پارامترها به t_0 بستگی داشته و بنابراین ، آن‌ها را با توابع $Z_i(t)$ نشان می‌دهیم . این توابع را متغیرهای حالت نامیم .

اگر تعداد این متغیرهای حالت برابر n باشد آن گاه n را مرتبهٔ سیستم نامند . بردار

$$\mathbf{Z}(t) = \{ Z_i(t) \} \ , \ i = 1,\dots,n$$

را بردار حالت نامیده و این بردار یکتا نمی‌باشد .

اگر $\mathbf{Z}(t_0) = 0$ باشد گوییم که سیستم در حالت صفر در $t = t_0$ است .

ما در اینجا فقط سیستم‌های خطی ، تغییر ناپذیر با زمان و علّی را در نظر خواهیم گرفت. چنین سیستم‌هایی برحسب معادلات زیر مشخص می‌شوند.

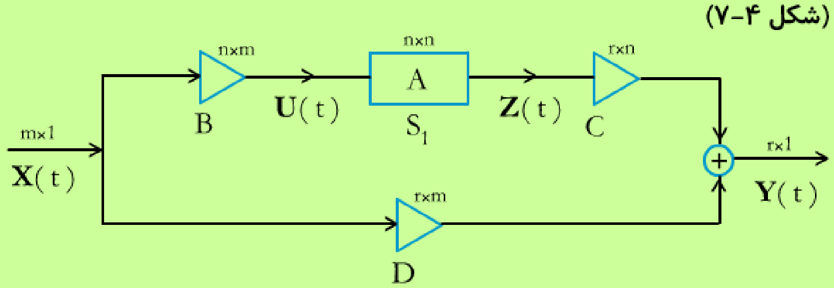
$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = A\,\mathbf{Z}(t) + B\,\mathbf{X}(t) \qquad (\text{۷-۱۰ الف})$$

$$\mathbf{Y}(t) = C\,\mathbf{Z}(t) + D\,\mathbf{X}(t) \qquad (\text{۷-۱۰ ب})$$

در روابط (۱۰-۷ الف) و (۱۰-۷ ب) A,B,C,D ماتریس با عناصر ثابت حقیقی و به ترتیب از مرتبهٔ $r\times m$ ، $r\times n$ ، $n\times m$ ، $n\times n$ هستند.

در شکل ۴-۷ نمودار بلوکی سیستم S که از نظر ترمینال‌ها توسط معادلات مذکور توصیف می‌شود ، رسم گردیده است .

(شکل ۴-۷)



این سیستم از سیستم دینامیکی S_1 با ورودی $\mathbf{U}(t)=B\,\mathbf{X}(t)$ و خروجی $\mathbf{Z}(t)$ و سه سیستم بدون حافظه (ضرب کننده‌ها) تشکیل یافته است .

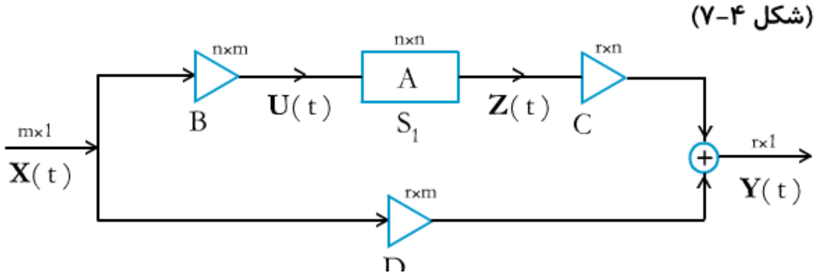
اگر ورودی $\mathbf{X}(t)$ سیستم S به ازاء جمیع مقادیر t مشخص شده باشد یا اگر به ازاء $t<0$ ، $\mathbf{X}(t)=0$ بوده و سیستم در $t=0$ در حالت صفر باشد ، در آن صورت پاسخ $\mathbf{Y}(t)$ سیستم S به ازاء $t>0$ برابراست با

$$\mathbf{Y}(t)=\int_0^\infty H(\alpha)\mathbf{X}(t-\alpha)d\alpha \qquad (۱۱-۷)$$

که $H(t)$ ماتریس پاسخ ضربه S می‌باشد .

انتگرال فوق در واقع از خطی و تغییر ناپذیر بودن سیستم و این واقعیت که به ازاء $t<0$ ، $H(t)=0$ می‌باشد (فرض علّی بودن) نتیجه شده است

(شکل ۴-۷)



برای تعیین ماتریس $H(t)$ از سیستم S_1 آغاز می‌کنیم .

همان طور که رابطهٔ (۱۰-۷ الف) بیان می‌کند ، خروجی

$\mathbf{Z}(t)$ این سیستم در معادله مذکور صدق می‌کند

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} - A\,\mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}(t) \qquad (۷-۱۲)$$

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = A\,\mathbf{Z}(t) + B\,\mathbf{X}(t) \qquad (۷-۱۰ \text{ الف})$$

$$\mathbf{Y}(t) = C\,\mathbf{Z}(t) + D\,\mathbf{X}(t) \qquad (۷-۱۰ \text{ ب})$$

پاسخ ضربه سیستم S_1 ماتریس $n \times n$ ، $\Phi(t) = [\varphi_{ji}(t)]$

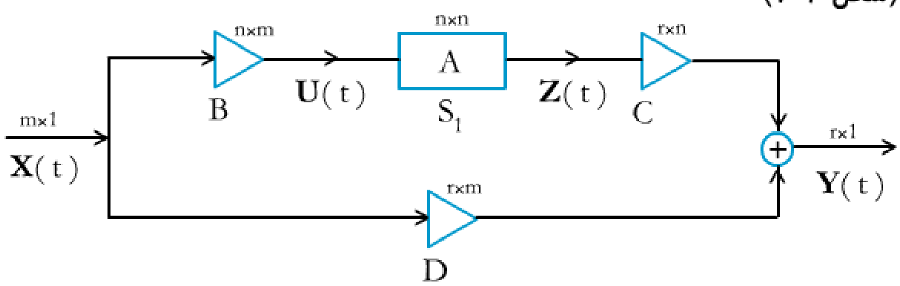
به نام ماتریس گذر (Transition) S است .

هنگامی که عنصر i ام , $U_i(t)$, ورودی $\mathbf{U}(t)$ مربوط به S_1 برابر $\delta(t)$

بوده و تمام عناصر دیگر صفر هستند .

تابع $\varphi_{ji}(t)$ با مقدار متغیر حالت j ام یعنی $Z_j(t)$ برابر است .

(شکل ۴-۷)



پس می‌توان گفت که

$$\mathbf{Z}(t)=\int_0^\infty \Phi(\alpha)\mathbf{U}(t-\alpha)d\alpha=\int_0^\infty \Phi(\alpha)B\mathbf{X}(t-\alpha)d\alpha \quad (۷-۱۳)$$

با جایگزین کردن رابطهٔ فوق در (۱۰-۷ ب) داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(t)&=\int_0^\infty C\Phi(\alpha)B\mathbf{X}(t-\alpha)d\alpha+D\mathbf{X}(t)\\&=\int_0^\infty [C\Phi(\alpha)B\mathbf{X}(t-\alpha)+\delta(\alpha)D\mathbf{X}(t-\alpha)]d\alpha\end{aligned} \quad (۷-۱۴)$$

$$\mathbf{Y}(t)=C\,\mathbf{Z}(t)+D\,\mathbf{X}(t) \quad (۷-۱۰ \text{ ب})$$

از مقایسه رابطه فوق با رابطه (۱۱-۷) می‌توان نتیجه گرفت که

ماتریس پاسخ ضربه سیستم S برابر است با

$$H(t)=C\Phi(t)B+\delta(t)D \quad (۷-۱۵)$$

با توجه به تعریف $\Phi(t)$ می‌توان گفت

$$\frac{d\,\Phi(t)}{dt}-A\,\Phi(t)=\delta(t)1_n \quad (۷-۱۶)$$

که 1_n ماتریس واحد از مرتبهٔ n است.

تبدیل لاپلاس $\Phi(t)$ یعنی $\Phi(s)$ تابع سیستم S_1 خواهد بود .

با گرفتن تبدیل از دو طرف رابطهٔ (۷-۱۶) داریم

$$S\Phi(s) - A\Phi(s) = 1_n \quad , \quad \Phi(s)=(s1_n - A)^{-1} \qquad (۷-۱۷)$$

بنابراین

$$\Phi(t)=e^{At} \quad , \quad t>0 \qquad (۷-۱۸)$$

نتیجه فوق در واقع تعمیم مستقیم مورد عددی است ، به هر حال تعیین عناصر $\varphi_{ji}(t)$ مربوط به ماتریس $\Phi(t)$ امری ارزشمند است .
هر عنصر مجموع توابع نمایی به شکل زیر است

$$\varphi_{ji}(t)=\sum_k P_{ji,k}(t)e^{s_k t} \quad , \quad t>0$$

که در آن S_k مقادیر ویژهٔ ماتریس A و $P_{ji,k}(t)$ جملات چند جمله ای برحسب t با مرتبه برابر با مضارب S_k می‌باشد .
چندین روش برای تعیین این چند جمله ای‌ها وجود دارد .
برای n کوچک ، ساده‌ترین راه ، جایگزین کردن n سیستم با n معادلات عددی به جای رابطه (۷-۱۶) می‌باشد .
با قرار دادن $\Phi(t)$ در رابطهٔ (۷-۱۵) داریم

$$H(t)=Ce^{At}B + \delta(t)D$$
$$H(s)= C(s1_n - A)^{-1} B+D \qquad (۷-۱۹)$$

اکنون فرض کنید که ورودی به سیستم S فرآیند WSS، $X(t)$ است .

به طور مختصر دربارهٔ خصوصیات طیفی خروجی حاصله اظهار نظرخواهیم کرد .

ولی این بررسی محدود به بردار حالت $\mathbf{Z}(t)$ خواهد بود.

سیستم S_1 مورد خاصی از S به ازاء $B=C=\mathbf{1}_n$ و $D=0$ می‌باشد.

در این مورد ، $\mathbf{Z}(t)=\mathbf{Y}(t)$

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt}-A\mathbf{Y}(t)=\mathbf{X}(t)\ ،\ H(s)=(s\mathbf{1}_n-A)^{-1} \qquad (۷-۲۰)$$

از ترکیب روابط فوق با روابط طیف‌های بردار می‌توان نتیجه گرفت که

$$S_{xy}(s)=S_{xx}(s)(-s\mathbf{1}_n-A)^{-1}\ ،\ S_{yy}(s)=(s\mathbf{1}_n-A^t)^{-1}S_{xy}(s)$$
$$S_{yy}(s)=(s\mathbf{1}_n-A^t)^{-1}\ S_{xx}(s)(-s\mathbf{1}_n-A)^{-1} \qquad (۷-۲۱)$$

معادلات دیفرانسیل

معادله

$$Y^{(n)}(t)+a_1Y^{(n-1)}(t)+\dots+a_nY(t)=X(t) \qquad (۷-۲۲)$$

سیستم S با ورودی $X(t)$ و خروجی $Y(t)$ را توصیف می‌کند.

این سیستم از مرتبه محدود است چون $Y(t)$ به ازاء $t>0$

برحسب مقادیر $X(t)$ به ازاء $t\geq 0$ و شرایط اولیهٔ

$$Y(0),Y'(0),\dots,Y^{(n-1)}(0)$$

تعیین می‌شود.

در حقیقت ، این سیستم مورد خاصی از سیستم شکل ۴-۷ به ازاء $m = r = 1$ ،

$$Z_1(t) = Y(t) \text{ ، } Z_2(t)=Y'(t) , \dots Z_n(t)=Y^{(n-1)}(t)$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C^t=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

و $D=0$ **می‌باشد.**

اگر شرایط مذکور را در رابطهٔ (۱۹-۷) منظور کنیم ،

پس از مقداری محاسبات داریم

$$H(s)=\frac{1}{s^n+a_1 s^{n-1}+\dots+a_n}$$

این نتیجه را می‌توان مستقیما به سادگی از رابطهٔ (۲۲-۷) به دست آورد .

با ضرب کردن دو طرف رابطهٔ (۲۲-۷) در $X(t-\tau)$ **و** $Y(t+\tau)$

می‌توان نتیجه گرفت که به ازاء جمیع مقادیر τ **روابط زیر حاکم است .**

$$R_{yx}^{(n)}(\tau)+a_1 R_{yx}^{(n-1)}(\tau)+\dots+a_n R_{yx}(\tau)=R_{xx}(\tau) \qquad (۷-۲۳)$$

$$R_{yy}^{(n)}(\tau)+a_1 R_{yy}^{(n-1)}(\tau)+\dots+a_n R_{yy}(\tau)=R_{xy}(\tau) \qquad (۷-۲۴)$$

فرآیند $X(t)$ را هنگامی فرآیند با مرتبهٔ محدود می‌نامیم که

فیلتر ابداع آن $L(s)$ تابع گویا از S باشد

$$S(s)=L(s)L(-s)$$

$$L(s)=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\dots\dots+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\dots\dots+a_n}=\frac{N(s)}{D(s)} \qquad (۷-۲۵)$$

که $N(s)$ و $D(s)$ چند جمله ای‌های هورویتز (Hurwitz) هستند.

فرآیند $X(t)$ پاسخ فیلتر $L(s)$ با ورودی فرآیند نویز سفید $i(t)$ است.

$$X^{(n)}(t)+a_1 X^{(n-1)}(t)+\dots\dots+a_n X(t)=b_0 i^{m}(t)+\dots\dots+b_m i(t) \qquad (۷-۲۶)$$

$X(t-\tau)$ یعنی گذشته $X(t)$ فقط به گذشته $i(t)$ بستگی دارد ، بنابراین

بر طرف راست رابطهٔ (۷-۲۶) به ازاء تمام مقادیر $\tau>0$ متعامد است .

با توجه به این نکته ، مشابه رابطهٔ (۷-۲۴) داریم

$$R^{(n)}(\tau)+a_1 R^{(n-1)}(\tau)+\dots\dots+a_n R(\tau)=0 \,، \quad \tau>0 \qquad (۷-۲۷)$$

با فرض اینکه ریشه‌های s_i مربوط به $D(s)$ ساده هستند ،

از رابطهٔ (۷-۲۷) نتیجه می‌گیریم که

$$R(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{s_i\tau} \qquad \tau>0$$

ضرایب α_i را می‌توان بر اساس قضیهٔ مقدار اولیه تعیین کرد .

به عبارت دیگر برای تعیین $R(\tau)$, $S(s)$ را به صورت

کسرهای جزیی بسط می‌دهیم .

$$S(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{s-s_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{-s-s_i}=S^{+}(s)+S^{-}(s) \quad (۷-۲۸)$$

مجموع اول تبدیل جزء علّی $R^{+}(\tau)=R(\tau)U(\tau)$ مربوط به $R(\tau)$ و

مجموع دوّم جزء غیر علّی $R^{-}(\tau)=R(\tau)U(-\tau)$ می‌باشد .

از آنجا که $R(-\tau)=R(\tau)$ است می‌توان گفت

$$R(\tau)=R^{+}(|\tau|)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{s_i|\tau|} \quad (۷-۲۹)$$

مثال ۳-۷

اگر $L(s)=\frac{۱}{s+\alpha}$ **باشد ، آن گاه**

$$S(s)=\frac{۱}{(s+\alpha)(-s+\alpha)}=\frac{\frac{۱}{۲\alpha}}{s+\alpha}+\frac{\frac{۱}{۲\alpha}}{-s+\alpha}$$

بنابراین

$$R(\tau)=\left(\frac{۱}{۲\alpha}\right)e^{-\alpha|\tau|}$$

مثال ۴-۷

معادلهٔ دیفرانسیل

$$X''(t) + ۳X'(t) + ۲X(t) = i(t) \ , \ R_{ii}(\tau) = \delta(\tau)$$

فرآیند $X(t)$ را با تابع خودبستگی $R(\tau)$ توصیف می‌کند.

از رابطهٔ (۲۷-۷) استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم

$$R''(\tau) + ۳R'(\tau) + ۲R(\tau) = ۰$$

بنابراین به ازاء $\tau > ۰$ داریم

$$R(\tau) = C_۱ e^{-\tau} + C_۲ e^{-۲\tau}$$

به منظور تعیین مقادیر ثابت $C_۱$ و $C_۲$ ، مقادیر $R(۰)$ و $R'(۰)$ را محاسبه خواهیم کرد. بدیهی است که

$$S(s) = \frac{۱}{(s^۲ + ۳s + ۲)(s^۲ - ۳s + ۲)}$$

$$= \frac{\frac{s}{۱۲} + \frac{۱}{۴}}{(s^۲ + ۳s + ۲)} + \frac{-\frac{s}{۱۲} + \frac{۱}{۴}}{(s^۲ - ۳s + ۲)}$$

کسر اول در طرف راست رابطهٔ فوق تبدیل $R^{+}(\tau)$ است، پس

$$R^{+}(۰^{+}) = \lim_{s \to \infty} sS^{+}(s) = \frac{۱}{۱۲} = C_۱ + C_۲ = R(۰)$$

مشابهاً

$$R'(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\left(sS^+(s) - \frac{1}{12}\right) = 0 = -C_1 - 2C_2$$

که نتیجه عبارت است از

$$R(\tau) = \frac{1}{6} e^{-|\tau|} - \frac{1}{12} e^{-2|\tau|}$$

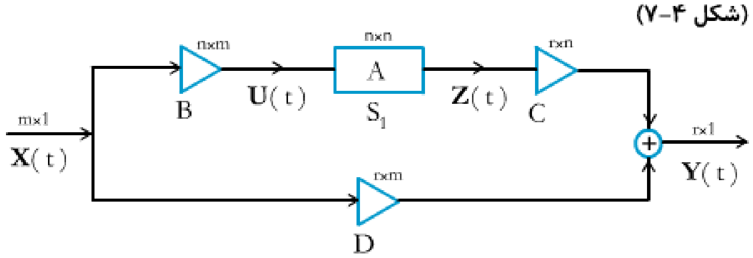
در پایان باید توجه کرد که $R(\tau)$ را می‌توان برحسب پاسخ ضربه $l(t)$ فیلتر ابداع $L(S)$ بیان کرد

$$R(\tau) = l(\tau) * l(-\tau) = \int_0^\infty l(|\tau| + \alpha)\, l(\alpha)\, d\alpha \qquad (۷-۳۰)$$

سیستم های گسسته زمان

نسخه دیجیتال سیستم شکل ۴-۷ یک سیستم با مرتبهٔ محدود مانند S است

(شکل ۴-۷)



که توسط معادلات زیر توصیف شده و در آن k زمان گسسته،

$X[k]$ بردار ورودی، $Y[k]$ بردار خروجی و $Z[k]$ بردار حالت است.

$$Z[k+1] = A\,Z[k] + B\,X[k] \qquad (۷-۳۱\ \text{الف})$$

$$Y[k] = C\,Z[k] + D\,X[k] \qquad (۷-۳۱\ \text{ب})$$

اگر مقادیر ویژهٔ Z_i مربوط به ماتریس $A(n \times n)$ به نحوی باشند که $|Z_i| < ۱$ گردد در آن صورت سیستم پایدار خواهد بود.

نتایج به دست آمده در بخش قبل را به سهولت می‌توان به سیستم های دیجیتالی تعمیم داد.

بالاخص باید توجه کرد که تابع سیستم S تبدیل z

$$H(z) = C(z\mathbf{1}_n - A)^{-1}B + D \qquad (۷-۳۲)$$

ماتریس پاسخ دلتای زیر می‌باشد.

$$H[k] = C\,\Phi[k]B + \delta[k]D \quad , \quad k \geq ۰ \qquad (۷-۳۳)$$

سیستم های عددی تحریک شده با نویز سفید را با جزئیات بیشتری مورد بحث قرار داده و از نتایج آن در فصل هشتم استفاده خواهیم کرد.

اکنون فرآیند دیجیتال حقیقی $X[n]$ با فیلتر ابداع $L(z)$ و طیف توان $S(z)$ را در نظر بگیرید

$$S(z) = L(z)\,L(z^{-1}) \quad , \quad L(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} l[n]\, z^{-n} \qquad (۷-۳۴)$$

که در آن n زمان گسسته است.

اگر $L(z)$ را بشناسیم می‌توانیم تابع خود بستگی $R[m]$ مربوط به $X[n]$ را از طریق تبدیل z معکوس یا با استفاده از قضیهٔ کانوولوشن تعیین نماییم.

$$R[m] = l[m] * l[-m] = \sum_{k=۰}^{\infty} l[k]\, l[|m|+k] \qquad (۷-۳۵)$$

خواص $R[m]$ را در مورد ردهٔ فرآیندهای مرتبه محدود بررسی می‌نماییم.

طیف توان $S(\omega)$ فرآیند مرتبه محدود $X[n]$ یک تابع گویا از $\cos\omega$ است،

پس فیلتر ابداع یک تابع گویا از z خواهد بود

$$L(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots\ldots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\ldots\ldots\ldots+a_Nz^{-N}} \quad (۷\text{-}۳۶)$$

برای تعیین تابع خودبستگی آن، $L[n]$ را به دست آورده و در رابطهٔ (۷-۳۵) قرار می‌دهیم

با فرض این که z_i ریشه های $D(z)$ ساده بوده و $M \le N$ است داریم

$$L(z)=\sum_i \frac{\gamma_i}{1-z_iz^{-1}} \quad , \quad l[n]=\sum_i \gamma_i z_i^n\, U[n]$$

به روش دیگر $S(z)$ را بسط می‌دهیم

$$S(z)=\sum_i \frac{\alpha_i}{1-z_iz^{-1}}+\sum \frac{\alpha_i}{1-z_iz} \quad , \quad R[m]=\sum_i \alpha_i z_i^{|m|} \quad (۷\text{-}۳۷)$$

باید توجه کرد که $\alpha_i=\gamma_i L(z_i^{-1})$ می‌باشد. فرآیند $X[n]$

معادله تکراری زیر را که در آن $i[n]$ ابداع آن است، اقناع می‌کند

$$X[n]+a_1X[n-1]+\ldots+a_NX[n-N]=b_0i[n]+\ldots+b_Mi[n-M] \quad (۷\text{-}۳۸)$$

از این معادله استفاده کرده و ارتباط ضرایب $L(z)$

را با دنبالهٔ $R[m]$ نشان می‌دهیم

حال فرض کنید که $X[n]$ معادله همگن زیر را ارضاء می‌کند

$$X[n] + a_1 X[n-1] + \dots + a_N X[n-N] = 0 \qquad (۷-۴۲)$$

این حالت خاصی از (۷-۴۰) به ازاء $b_0 = 0$ است. با حل آن برای $X[n]$ داریم

$$X[n] = c_1 z_1^n + \dots + c_N z_N^n \quad , \quad D(z_i) = 0 \qquad (۷-۴۳)$$

اگر $X[n]$ فرآیند ایستان باشد، فقط عبارات شامل $z_i = e^{j\omega_i}$ می‌توانند ظاهر شوند.

علاوه بر این، ضرایب آن ها C_k باید ناهم‌بسته با متوسط صفر باشند.

با توجه به این نکات باید گفت اگر $X[n]$ فرآیند WSS بوده و رابطه (۷-۴۲) را اقناع می‌کند، در آن صورت تابع خود بستگی آن باید به شکل مجموع توابع نمایی زیر باشد

$$R[m] = \sum \alpha_i e^{j\omega_i |m|}, S(\omega) = 2\pi \sum \alpha_i \delta(\omega - \beta_i) \ , \ |\omega| < \pi \qquad (۷-۴۴)$$

که در آن

$$\alpha_i = E\{c_i^2\} \text{ و } \beta_i = \omega_i - 2\pi k_i$$

فرآیندهای متوسط متحرک [Moving Average]

فرآیند $X[n]$ را هنگامی متوسط متحرک (MA) می‌نامند که

$$X[n] = b_0 i[n] + \ldots + b_M i[n-M] \qquad (۷-۴۵)$$

در این مورد، $L(z)$ یک چند جمله ای بوده و تبدیل معکوس آن $l[n]$ طول محدودی دارد (فیلتر FIR) :

$$L(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M} \;,\quad l[n] = b_0 \delta(n) + \ldots + b_M \delta[n-M] \qquad (۷-۴۶)$$

از آنجا که به ازاء $n > m$ ، $l[n] = 0$ است،

رابطهٔ (۷-۳۵) به ازاء $0 \le m \le M$ به صورت زیر در می‌آید

$$R[m] = \sum_{k=0}^{M-m} l[m+k]\, l[k] = \sum_{k=0}^{M-m} b_{k+m} b_k \qquad (۷-۴۷)$$

و به ازاء $m > M$ برابر صفر می‌شود. همچنین بدیهی است که

$$R[0] = b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_M^2$$

$$R[1] = b_0 b_1 + b_1 b_2 + \ldots + b_{M-1} b_M$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R[M] = b_0 b_M$$

مثال ۶-۷

تصورکنید که $X[n]$ متوسط حسابی M مقدار $i[n]$ باشد

$$X[n]=\frac{1}{M}(i[n]+i[n-1]+\dots+i[n-M+1])$$

در این مورد

$$L(z)=\frac{1}{M}(1+z^{-1}+\dots+z^{-M+1})=\frac{1-z^{-M}}{M(1-z^{-1})}$$

$$R[m]=\frac{1}{M^2}\sum_{k=0}^{M-1-|m|}1=\frac{M-|m|}{M^2}=\frac{1}{M}\left(1-\frac{|m|}{M}\right),\ |m|\le M$$

$$S(z)=L(z)L(z^{-1})=\frac{2-z^{-M}-z^{M}}{M^2(2-z^{-1}-z)}\ ,\ S(e^{j\omega})=\frac{\sin^2\frac{M\omega}{2}}{M^2\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

متوسط متحرک خود باز گشتی

فرآیند $X[n]$ را هنگامی فرآیند متوسط متحرک خود بازگشتی (ARMA) می‌نامند که معادلهٔ زیر را ارضاء کند.

$$\begin{aligned}X[n]+a_1X[n-1]+\dots+a_NX[n-N]\\=b_0i[n]+\dots+b_Mi[n-M]\end{aligned}\qquad(۷-۴۸)$$

فیلتر ابداع آن $L(z)$ همان کسر رابطهٔ (۷-۳۶) خواهد بود.

دوباره، $i[n]$ نویز سفید بوده و بنابراین

$$E\{X[n-m]\,i[n-r]\}=0\quad,\quad m<r$$

با ضرب طرفین رابطهٔ (۷-۴۸) در $X[n-m]$

و با به کار بردن رابطهٔ فوق ، می‌توان نوشت

$$R[m] + a_1 R[m-1] + \dots + a_N R[m-N] = 0 \ , \ m > M \qquad (۷-۴۹)$$

باید توجه کرد که بر خلاف مورد AR ، رابطهٔ فوق

فقط به ازاء $M < m$ صادق اسا

۷-۳ سری فوریه و بسط K - L

فرآیند $X(t)$ هنگامی متناوب متوسط مربع (MS) با تناوب T است

که به ازاء جمع مقادیر t

$$E\{|X(t+T) - X(t)|^2\} = 0$$

فرآیند WSS هنگامی متناوب MS است که تابع خود بستگی آن یعنی

$R(\tau)$ با تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ متناوب باشد.

با بسط $R(\tau)$ به صورت سری فوریه می‌توان نوشت

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{jn\omega_0 \tau} \ , \quad \gamma_n = \frac{1}{T}\int_0^T R(\tau)\, e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \qquad (۷-۵۰)$$

فرآیند WSS متناوب $X(t)$ با تناوب T مفروض است،

مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \ , \quad C_n = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt \qquad (۷-۵۱)$$

قضیه:

مجموع رابطهٔ (۷-۵۱) از نظر مفهوم MS با $X(t)$ برابر است

$$E\{|X(t)-\hat{X}(t)|^{2}\}=0 \qquad (۷-۵۲)$$

علاوه بر آن، متغیرهای تصادفی C_n نا هم بسته با متوسط صفر به ازاء $n\neq 0$ بوده و واریانس آنها با γ_n برابر است

$$E\{C_n\}=\begin{cases}\eta_x, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases},\quad E\{C_n C_m^*\}=\begin{cases}\gamma_n, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases} \qquad (۷-۵۳)$$

برای اثبات حاصل ضربهای زیر را در نظر بگیرید

$$C_n X^*(\alpha)=\frac{1}{T}\int_0^T X(t)X^*(\alpha)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$C_n C_n^*=\frac{1}{T}\int C_n X^*(t)\,e^{jn\omega_0 t}\,dt$$

اگر از طرفین روابط فوق امید ریاضی بگیریم داریم

$$E\{C_n X^*(\alpha)\}=\frac{1}{T}\int_0^T R(t-\alpha)e^{-jn\omega_0 t}\,dt=\gamma_n e^{-jn\omega_0\alpha}$$

$$E\{C_n C_m^*\}=\frac{1}{T}\int_0^T \gamma_n e^{-jn\omega_0 t}e^{jm\omega_0 t}\,dt=\begin{cases}\gamma_n, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

و رابطهٔ (۷-۵۳) نتیجه می‌شود.

به منظور اثبات (۷-۵۲) با استفاده از نتایج فوق می‌توان نوشت

$$E\{|\hat{X}(t)|^{2}\}=\sum E\{|C_n|^{2}\}=\sum\gamma_n=R(0)=E\{|X(t)|^{2}\}$$

$$E\{\hat{X}(t)X^*(t)\}=\sum E\{C_n X^*(t)\}e^{jn\omega_0 t}=$$

$$\sum\gamma_n=E\{\hat{X}^*(t)X(t)\}$$

و به سادگی رابطهٔ (۵۲-۷) اثبات می‌شود.

اکنون فرض کنید که فرآیند WSS ، $X(t)$ متناوب نیست،

با انتخاب مقدار ثابت دلخواه T ، دوباره مجموع $\hat{X}(t)$ را مطابق رابطهٔ (۵۱-۷) تشکیل می‌دهیم.

می‌توان نشان داد که $\hat{X}(t)$ برابر $X(t)$ است ولی نه برای جمیع مقادیر t بلکه فقط به ازاء مقادیر t دربازهٔ $(0, T)$ این تساوی MS برقرار است.

$$E\{|\hat{X}(t) - X(t)|^2\} = 0 , \quad 0 < t < T \qquad (۷-۵۴)$$

بر خلاف مورد متناوب، ضرایب C_n در این بسط متعامد نیستند (به ازاء مقادیر بزرگ n ، آنها تقریباً متعامد هستند).

در سطور پائین، نشان می‌دهیم که یک فرآیند دلخواه مانند $X(t)$ ، ایستان یا غیر ایستان را می‌توان به صورت سری با ضرایب متعامد بسط داد.

بسط Karhunen- Loeve (K- L)

سری فوریه حالت خاصی از بسط فرآیند $X(t)$ به صورت سری زیر است

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(t) \qquad 0 < t < T \qquad (۷-۵۵)$$

که در آن $\varphi_n(t)$ مجموعه ای از توابع اورتو نرمال در بازهٔ $(0, T)$ است

$$\int_0^T \varphi_n(t)\, \varphi_m^*(t)dt = \delta(n - m) \qquad (۷-۵۶)$$

و ضرایب C_n متغیرهای تصادفی هستند که از رابطهٔ زیر به دست می‌آیند

$$C_n = \int_0^T X(t)\, \varphi_n^*(t)dt \qquad (۷-۵۷)$$

در این نوع بسط ، مسأله تعیین مجموعه ای از توابع اورتونرمال $\varphi_n(t)$ است به نحوی که اولاً مجموع رابطهٔ (۵۵-۷) با $X(t)$ برابر باشد (MS) و ثانیاً ضرایب C_n متعامد گردند. برای حل این مسأله ، معادلهٔ انتگرالی زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\int_0^T R(t_1, t_2)\,\varphi(t_2)\,dt_2 = \lambda\varphi(t_1)\ ,\quad 0 < t_1 < T \qquad (۷-۵۸)$$

که در آن $R(t_1, t_2)$ تابع خود بستگی فرآیند $X(t)$ است.

با استناد به نظریهٔ معادلات انتگرالی، می‌دانیم که توابع ویژهٔ $\varphi_n(t)$ (۵۸-۷) مانند رابطهٔ (۵۶-۷) اورتونرمال بوده و در تساوی زیر صدق می‌کنند

$$R(t, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\varphi_n(t)|^2 \qquad (۷-۵۹)$$

که در آن λ_n مقادیر ویژهٔ متناظر هستند.

این ویژگی ما حصل مشخصه معین مثبت بودن $R(t_1, t_2)$ می‌باشد.

با استفاده از این ویژگی،نشان می‌دهیم که اگر $\varphi_n(t)$ توابع ویژهٔ رابطهٔ (۵۸-۷) باشند، در آن صورت

$$E\{|X(t) - \hat{X}(t)|^2\} = 0 \quad ,\quad 0 < t < T \qquad (۷-۶۰)$$

و همچنین

$$E\{C_n C_m^*\} = \lambda_n \delta[n - m] \qquad (۷-۶۱)$$

برای اثبات می‌توان گفت که با توجه به روابط (۵۷-۷) و (۵۸-۷) روابط زیر حاکم است

$$E\{C_n X^*(\alpha)\} = \int_0^T R^*(\alpha, t)\,\varphi_n^*(t)\,dt = \lambda_n \varphi_n^*(\alpha)$$

$$E\{C_n C_m^*\} = \lambda_n \int_0^T \varphi_n^*(t)\,\varphi_m(t)dt = \lambda_n \delta[n-m] \qquad \text{(۷-۶۲)}$$

بنابراین

$$E\{C_n \hat{X}^*(t)\} = \sum_{m=1}^{\infty} E\{C_n C_m^*\}\varphi_m^*(t) = \lambda_n \varphi_n^*(t)$$

$$E\{\hat{X}(t)\,X^*(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\,\varphi_n(t)\,\varphi_n^*(t) = R(t,t)$$

$$= E\{\hat{X}^*(t)X(t)\} = E\{|X(t)|^2\} = E\{|\hat{X}(t)|^2\}$$

و رابطهٔ (۷-۶۰) به دست می‌آید.

شایان توجه است که معکوس موضوع فوق نیز صادق است.

اگر $\varphi_n(t)$ مجموعه اورتونرمالی از توابع بوده و

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(t) \;,\; E\{C_n C_m^*\} = \begin{cases} \sigma_n^2 \;, & n=m \\ 0 \;, & n \neq m \end{cases}$$

باشد در آن صورت توابع $\varphi_n(t)$ باید رابطهٔ (۷-۵۸) را به ازاء $\lambda = \sigma_n^2$ ارضاء نمایند. به منظور اثبات می‌توان گفت بنا به فرضهای به عمل آمده نتیجه می‌گیریم که C_n از رابطهٔ (۷-۵۷) قابل تعیین است.

علاوه بر آن

$$E\{X(t)\,C_m^*\} = \sum_{n=1}^{\infty} E\{C_n C_m^*\}\,\varphi_n(t) = \sigma_m^2\,\varphi_m(t)$$

$$E\{X(t)\,C_m^*\} = \int_0^T E\{X(t)\,X^*(\alpha)\}\varphi_m(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int_0^T R(t,\alpha)\,\varphi_m(\alpha)\,d\alpha$$

و حکم ثابت می‌شود.

مجموع رابطهٔ (۷-۵۵) را بسط Karhunen- Loeve (K- L) فرآیند X(t) می‌نامند.

در این بسط ، لزومی ندارد X(t) ایستان باشد.

اگر فرآیند ایستان باشد در آن صورت مبدأ را می‌توان به دلخواه تعیین کرد.

اکنون دو مثال از این نوع بسط متعامد فرآیندهای تصادفی را بررسی می‌کنیم

مثال ۷-۷

فرآیند X(t) پائین گذر ایده‌آل با تابع خود بستگی زیر مفروض است

$$R(\tau) = \frac{\sin a\,\tau}{\pi\,\tau}$$

می‌خواهیم بسط K- L آن را به دست آوریم.

با جابجایی مبدأ زمان به طور مناسب، با توجه به (۷-۵۸) نتیجه می‌گیریم

که توابع $\varphi_n(t)$ باید معادلهٔ انتگرالی زیر را اقناع کند

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{\sin a(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}\,\varphi_n(\tau)\,d\tau = \lambda_n\,\varphi_n(t) \qquad (۷-۶۳)$$

جوابهای این معادله به توابع [Prolate - Spheroidal] معروف است.

مثال ۸-۷

در این مثال می‌خواهیم بسط $K-L$ **فرآیند وینر** $X(t)$ **را به دست آوریم.**

در این فرآیند تابع خود بستگی عبارت است از

$$R(t_1, t_2) = \alpha \min(t_1, t_2) = \begin{cases} \alpha t_2 , & t_2 < t_1 \\ \alpha t_1 , & t_2 > t_1 \end{cases}$$

با قرار دادن تابع فوق در معادلهٔ (۵۸-۷) داریم

$$\alpha \int_0^{t_1} t_2 \varphi(t_2)\, dt_2 + \alpha t_1 \int_{t_1}^{T} \varphi(t_2)\, dt_2 = \lambda \varphi(t_1) \qquad (۷\text{-}۶۴)$$

برای حل این معادله، شرایط اولیهٔ مناسب را محاسبه کرده و دو بار مشتق می‌گیریم.

$$\varphi(0) = 0 \qquad \alpha \int_{t_1}^{T} \varphi(t_2)\, dt_2 = \lambda \varphi'(t_1)$$

$$\varphi'(T) = 0 \qquad \lambda \varphi''(t) + \alpha \varphi(t) = 0$$

از حل معادلهٔ اخیر داریم

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega_n t \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_n}} = \frac{(2n+1)\pi}{2T}$$

پس، دربارهٔ $(0, T)$ **فرآیند وینر را می‌توان به صورت مجموعی از امواج سینوسی نوشت**

$$W(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \omega_n t \ , \ C_n = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^{T} W(t) \sin \omega_n t\, dt$$

که در آن ضرایب C_n **نا هم بسته بوده و دارای واریانس** $E\{c_n^2\} = \lambda_n$ **می‌باشند.**

۴–۷ توصیف طیفی فرآیندهای تصادفی

تبدیل فوریه فرآیند تصادفی $X(t)$، فرآیند تصادفی $\mathbf{X}(\omega)$ زیر می‌باشد

$$\mathbf{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (۷–۶۵)$$

انتگرال به صورت حَد MS تعبیر می‌شود.

با استدلالی مشابه رابطهٔ (۵۲–۷) می‌توان نشان داد که (فرمول معکوس)

$$X(t) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (۷–۶۶)$$

رابطهٔ فوق نیز از نظر مفهوم MS برقرار است.

خواص تبدیل فوریه برای سیگنال های تصادفی نیز صادق است

برای مثال، اگر $Y(t)$ خروجی یک سیستم خطی با ورودی $X(t)$

و تابع سیستم $H(\omega)$ باشد، در آن صورت

$$\mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{X}(\omega)\, H(\omega)$$

متوسط $\mathbf{X}(\omega)$ باتبدیل فوریه متوسط $X(t)$ برابر است.

تابع خود بستگی $\mathbf{X}(\omega)$ را بر حسب تبدیل فوریه دو بعدی زیر بیان خواهیم کرد.

$$\Gamma(U, V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R(t_۱, t_۲)\, e^{-j(Ut_۱ + Vt_۲)}\, dt_۱\, dt_۲ \qquad (۷–۶۷)$$

تبدیل فوق در واقع تبدیل فوریهٔ دو بعدی تابع خود بستگی $X(t)$ یعنی $R(t_۱, t_۲)$ می‌باشد.

با ضرب نمودن (۶۵-۷) در مزدوج آن و گرفتن امید ریاضی از طرفین رابطه داریم

$$E\{ \mathbf{X}(U)\,\mathbf{X}^*(V) \} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\{ X(t_۱)\,X^*(t_۲) \}\, e^{-j(U t_۱ - V t_۲)}\, dt_۱\, dt_۲$$

بنابراین

$$E\{ \mathbf{X}(U)\,\mathbf{X}^*(V) \} = \Gamma(U, -V) \qquad (۷-۶۸)$$

با استفاده از (۶۸-۷) نشان خواهیم داد که اگر $X(t)$ نویز سفید غیر ایستان
با توان متوسط $q(t)$ باشد، آن گاه $\mathbf{X}(\omega)$ فرآیند ایستان بوده
و خود بستگی آن با تبدیل فوریه $q(t)$ یعنی $Q(\omega)$ برابر است

قضیه:

اگر

$$R(t_۱, t_۲) = q(t_۱)\delta(t_۱ - t_۲)$$

آن گاه

$$E\{ \mathbf{X}(\omega+\alpha)\,\mathbf{X}^*(\alpha) \} = Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (۷-۶۹)$$

با استناد به تساوی

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(t_۱)\,\delta(t_۱ - t_۲)\, e^{-j(U t_۱ + V t_۲)}\, dt_۱ dt_۲ = \int_{-\infty}^{\infty} q(t_۲)\, e^{-j(U+V) t_۲}\, dt_۲$$

می‌توان نتیجه گرفت که $\Gamma(U, V) = Q(U+V)$ می‌باشد.

بنابراین [رابطهٔ ۶۸-۷ را ببینید]

$$E\{ \mathbf{X}(\omega+\alpha)\,\mathbf{X}^*(\alpha) \} = \Gamma(\omega+\alpha, -\alpha) = Q(\omega)$$

توجه کنید که اگر $X(t)$ حقیقی باشد در آن صورت

$$E\{\mathbf{X}(U)\,\mathbf{X}(V) \} = \Gamma(U, V) \qquad (۷-۷۰)$$

علاوه بر آن

$$\mathbf{X}(-\omega) = \mathbf{X}^*(\omega) \quad , \quad \Gamma(-U, -V) = \Gamma^*(U, V) \qquad (۷-۷۱)$$

کوواریانس طیف انرژی

برای تعیین اتوکوواریانس $|\mathbf{X}(\omega)|^2$، باید گشتاورهای مرتبه چهارم $\mathbf{X}(\omega)$ را بشناسیم.

به هر حال اگر فرآیند $X(t)$ نرمال باشد، نتایج را می‌توان بر حسب تابع $\Gamma(U,V)$ بیان کرد.

فرض می‌کنیم که فرآیند $X(t)$ حقیقی بوده و

$$\mathbf{X}(\omega)=\mathbf{A}(\omega)+j\mathbf{B}(\omega)\,,\ \Gamma(U,V)=\Gamma_r(U,V)+j\Gamma_i(U,V) \qquad (۷-۷۲)$$

با استفاده از روابط (۷-۶۸) و (۷-۷۰) می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
2E\{\mathbf{A}(U)\mathbf{A}(V)\} &= \Gamma_r(U,V)+\Gamma_r(U,-V)\\
2E\{\mathbf{A}(V)\mathbf{B}(U)\} &= \Gamma_i(U,V)+\Gamma_i(U,-V)\\
2E\{\mathbf{B}(U)\mathbf{B}(V)\} &= \Gamma_r(U,V)-\Gamma_r(U,-V)\\
2E\{\mathbf{A}(U)\mathbf{B}(V)\} &= \Gamma_i(U,V)-\Gamma_i(U,-V)
\end{aligned} \qquad (۷-۳۳)$$

قضیه:

اگر $X(t)$ فرآیند نرمال حقیقی با متوسط صفر باشد، آن گاه

$$\mathrm{Cov.}\{|\mathbf{X}(U)|^2, |\mathbf{X}(V)|^2\} = \Gamma^2(U,-V)+\Gamma^2(U,V) \qquad (۷-۷۴)$$

برای اثبات باید گفت نرمال بودن $X(t)$ به مفهوم توأماً نرمال بودن فرآیندهای $\mathbf{A}(\omega)$ و $\mathbf{B}(\omega)$ با متوسط صفر است پس داریم

$$\begin{aligned}
&E\{|\mathbf{X}(U)|^2|\mathbf{X}(V)|^2\}-E\{|\mathbf{X}(U)|^2\}E\{|\mathbf{X}(V)|^2\}\\
&= E\{[\mathbf{A}^2(U)+\mathbf{B}^2(U)][\mathbf{A}^2(V)+\mathbf{B}^2(V)]\}\\
&- E\{\mathbf{A}^2(U)+\mathbf{B}^2(U)\}E\{\mathbf{A}^2(V)+\mathbf{B}^2(V)\}\\
&= 2E^2\{\mathbf{A}(U)\mathbf{A}(V)\}+2E^2\{\mathbf{B}(U)\mathbf{B}(V)\}\\
&+ 2E^2\{\mathbf{A}(U)\mathbf{B}(V)\}+2E^2\{\mathbf{A}(V)\mathbf{B}(U)\}
\end{aligned}$$

با جایگزینی (۷-۷۳) در رابطهٔ فوق، رابطهٔ (۷-۷۴) به دست می‌آید

فرآیندهای ایستان

فرض کنید که $X(t)$ فرآیند ایستان با خود بستگی $R(t_1,t_2)=R(t_1-t_2)$ و طیف توان $S(\omega)$ است. نشان می‌دهیم که

$$\Gamma(U,V)=2\pi S(U)\,\delta(U+V) \qquad (۵-۷۵)$$

برای اثبات با $t_1=t_2+\tau$ و استفاده از (۷-۶۷) می‌توان گفت که تبدیل دو بعدی $R(t_1-t_2)$ برابر است با

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} R(t_1-t_2)\,e^{-j(Ut_1+Vt_2)}\,dt_1\,dt_2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(U+V)t_2}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau\,dt_2$$

پس

$$\Gamma(U,V)=S(U)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(U+V)t_2}\,dt_2$$

و از رابطهٔ فوق می‌توان رابطهٔ (۷۵–۷) را نتیجه گرفت چون

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt = 2\pi\, \delta(\omega)$$

با استناد به روابط (۷۵–۷) و (۶۸–۷) می‌توان گفت که

$$E\{ \mathbf{X}(U)\, \mathbf{X}^*(V) \} = 2\pi\, S(U)\, \delta(U - V) \qquad (7\text{-}76)$$

این رابطه نشان می‌دهد که تبدیل فوریه فرآیند ایستان، فرآیند نویز سفید غیر ایستان با توان متوسط $2\pi\, S(U)$ است.

می‌توان اثبات کرد که عکس این مطلب نیز صادق است.

فرآیند $X(t)$ در (۶۶–۷) هنگامی WSS است که فقط $E\{ \mathbf{X}(\omega) \} = 0$ به ازاء $\omega \neq 0$ بوده

و

$$E\{ \mathbf{X}(U)\, \mathbf{X}(V) \} = Q(U)\, \delta(U - V) \qquad (7\text{-}77)$$

باشد

فرآیندهای حقیقی

اگر $X(t)$ حقیقی باشد، آن گاه $\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{A}(-\omega)$ و $\mathbf{B}(\omega) = \mathbf{B}(-\omega)$ بوده و همچنین

$$X(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) \cos \omega t\, d\omega - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \mathbf{B}(\omega) \sin \omega t\, d\omega \qquad (7\text{-}78)$$

بنابراین کافی است که $\mathbf{A}(\omega)$ و $\mathbf{B}(\omega)$ را فقط برای $\omega \geq 0$ مشخص و تعریف کنیم.

با توجه به (۶۸–۷) و (۷۰–۷) نتیجه می‌گیریم که

$$E\{ [\mathbf{A}(U) + j\mathbf{B}(U)]\, [\mathbf{A}(V) \pm j\mathbf{B}(V)] \} = 0\,,\ U \neq \pm V$$

با مساوی قرار دادن اجزاء حقیقی و موهومی، داریم

$$E\{\mathbf{A}(U)\mathbf{A}(V)\} = E\{\mathbf{A}(U)\mathbf{B}(V)\}$$

(۷-۷۹ الف)

$$=E\{\mathbf{B}(U)\mathbf{B}(V)\}=0 \qquad \text{به ازاء } U \neq V$$

به ازاء $V = -\omega$ و $U = \omega$، رابطهٔ (۷-۷۹) فوق به $E\{\mathbf{X}(\omega)\mathbf{X}(\omega)\} = 0$ به ازاء $\omega \neq 0$ منجر می‌شود، بنابراین

$$E\{\mathbf{A}^2(\omega)\} = E\{\mathbf{B}^2(\omega)\}, E\{\mathbf{A}(\omega)\mathbf{B}(\omega)\} = 0 \quad \text{(۷-۷۹ ب)}$$

می‌توان نشان داد که عکس این خاصیت نیز صادق است.

بنابراین فرآیند حقیقی $X(t)$ هنگامی WSS است که ضرایب $\mathbf{A}(\omega)$ و $\mathbf{B}(\omega)$ بسط آن یعنی (رابطهٔ ۷-۷۸) رابطهٔ (۷-۷۹) را اقناع کرده و

$$E\{\mathbf{A}(\omega)\} = E\{\mathbf{B}(\omega)\} = 0$$

به ازاء $\omega \neq 0$ باشد.

پنجره ها:

فرآیند WSS، $X(t)$ و تابع $w(t)$ با تبدیل فوریه $W(\omega)$ را در نظر بگیرید فرآیند $Y(t) = w(t)\,X(t)$ را تشکیل می‌دهیم.
این فرآیند، غیر ایستان با تابع خودبستگی زیر است

$$R_{yy}(t_1, t_2) = w(t_1)\, w^*(t_2)\, R(t_1 - t_2)$$

تبدیل فوریه $R_{yy}(t_1, t_2)$ عبارت است از

$$\Gamma_{yy}(U, V) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(t_1)\, w^*(t_2)\, R(t_1 - t_2)\, e^{-j(Ut_1 + Vt_2)}\, dt_1 dt_2$$

مانند روش مورد استفاده در اثبات رابطهٔ (۷-۷۵) عمل کرده و به این نتیجه می‌رسیم

$$\Gamma_{yy}(U, V) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(U - \beta)\, W^*(-V - \beta)\, S(\beta)\, d\beta \quad \text{(۷-۸۰)}$$

با استناد به رابطه (۷-۶۸) و نتیجه به دست آمده در رابطهٔ (۷-۸۰) می‌توان گفت که تابع خود بستگی تبدیل فوریه

$$\mathbf{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\, X(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad \text{(۷-۸۱)}$$

برابر است با

$$E\{\mathbf{Y}(U)\mathbf{Y}^*(V)\} = \Gamma_{yy}(U, -V)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(U - \beta)\, W^*(V - \beta)\, S(\beta)\, d\beta$$

بنابراین

$$E\{|\mathbf{Y}(\omega)|^{۲}\} = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |W(\omega-\beta)|^{۲} S(\beta)\, d\beta \qquad (۷-۸۲)$$

مثال ۹-۷

انتگرال

$$\mathbf{X}_T(\omega)\int_{-T}^{T} X(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

تبدیل فوریه قطعه $X(t)\, p_T(t)$ فرآیند $X(t)$ است.

این مورد خاصی از رابطهٔ (۸۱-۷) بوده و در آن

$$w(t) = p_T(t) \quad \text{و} \quad W(\omega) = ۲\frac{\sin T\omega}{\omega}$$

می‌باشد.

بنابراین اگر $X(t)$ فرآیند ایستان باشد در آن صورت (رابطهٔ ۸۲-۷ را ببینید)

$$E\{|\mathbf{X}_T(\omega)|^{۲}\} = S(\omega) * \frac{۲\sin^{۲} T\omega}{\pi\omega^{۲}} \qquad (۷-۸۳)$$

توصیف Fourier - Stieltjes فرآیندهای WSS

می‌خواهیم توصیف طیفی فرآیند WSS ، $X(t)$ را به صورت انتگرال زیر بیان کنیم.

$$\mathbf{Z}(\omega) = \int_{0}^{\omega} \mathbf{X}(\alpha)\, d\alpha \qquad (۷-۸۴)$$

نشان داده ایم که تبدیل فوریه $X(t)$ یعنی $\mathbf{X}(\omega)$ فرآیند نویز سفید غیر ایستان با توان متوسط $۲\pi\, S(\omega)$ است.

با استناد به (۷۶-۷) می‌توان گفت که $Z(\omega)$ فرآیندی با نمو متعامد است.

به ازاء هر مقدار $\omega_۴ < \omega_۳ < \omega_۲ < \omega_۱$ می‌توان نوشت

$$E\{[\mathbf{Z}(\omega_۲)-\mathbf{Z}(\omega_۱)][\mathbf{Z}^*(\omega_۴)-\mathbf{Z}^*(\omega_۳)]\} = ۰ \qquad (۷-۸۵\ \text{الف})$$

$$E\{|\mathbf{Z}(\omega_۲)-\mathbf{Z}(\omega_۱)|^{۲}\} = ۲\pi\int_{\omega_۱}^{\omega_۲} S(\omega)\, d\omega \qquad (۷-۸۵\ \text{ب})$$

بدیهی است که

$$d\,\mathbf{Z}(\omega) = \mathbf{X}(\omega)\,d\omega \qquad (۷\text{-}۸۶)$$

پس فرمول معکوس (۶۶-۷) را می‌توان به صورت انتگرال [Fourier - Stieltjes] نوشت

$$X(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\,\mathbf{Z}(\omega) \qquad (۷\text{-}۸۷)$$

به ازاء

$$\omega_1 = U \;,\; \omega_2 = U + dU \;,\; \omega_3 = V \;,\; \omega_4 = V + dV$$

رابطهٔ (۸۵-۷) به صورت زیر در می‌آید

$$E\{d\,\mathbf{Z}(U)\,d\,\mathbf{Z}^*(V)\} = 0 \;,\quad U \neq V$$
$$E\{|d\,\mathbf{Z}(U)|^2\} = 2\pi\, S(U)\, dU \qquad (۷\text{-}۸۸)$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان برای توصیف طیف $S(\omega)$ مربوط به فرآیند WSS ، $X(t)$ بر حسب فرآیند $Z(\omega)$ بیان کرد.

تجزیه Wold

با استفاده از رابطهٔ (۸۵-۷) نشان می‌دهیم که هر فرآیند دلخواه WSS مانند $X(t)$ را می‌توان به صورت مجموع زیر بیان کرد

$$X(t) = X_r(t) + X_p(t) \qquad (۷\text{-}۸۹)$$

که در آن $X_r(t)$ فرآیند عادی و $X_p(t)$ فرآیند قابل پیش بینی مرکب از توابع نمائی زیر است.

$$X_p(t) = C_0 + \sum_i C_i\, e^{j\omega_i t} \;,\quad E\{C_i\} = 0 \qquad (۷\text{-}۹۰)$$

علاوه بر این، دو فرآیند متعامد هستند

$$E\{X_r(t+\tau)\,X_p^*(t)\} = 0 \qquad (۷\text{-}۹۱)$$

بسط فوق را تجزیه Wold می‌نامند.

در فصل بعد، فرآیندهای $X_r(t)$ و $X_p(t)$ را به عنوان

خروجی های دو سیستم خطی با ورودی $X(t)$ تعریف خواهیم کرد.

هم چنین نشان می‌دهیم که $X_p(t)$ از نظر این که می‌توان آن را بر حسب

گذشته اش تعیین کرد، قابل پیش بینی است.

فرآیند $X_r(t)$ قابل پیش بینی نیست. با استفاده از خواص تبدیل انتگرالی

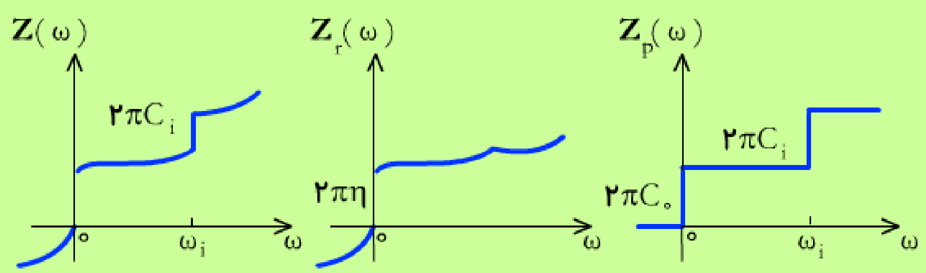
$X(t)$ یعنی $Z(\omega)$ ، رابطهٔ (۸۹–۷) را اثبات می‌کنیم.

فرآیند $Z(\omega)$ خانواده ای از توابع است.

به طور کلی، این توابع در مجموعه ای از نقاط ω_i به ازاء تقریباً هر رخداد،

نا پیوسته هستند.

$Z(\omega)$ را به صورت مجموع زیر بیان می‌کنیم (شکل ۵–۷)



(شکل ۵–۷)

$$Z(\omega) = Z_r(\omega) + Z_p(\omega) \qquad (۷–۹۲)$$

که در آن $Z_r(\omega)$ فرآیند پیوسته به ازاء $\omega \neq 0$ و $Z_p(\omega)$

تابع پله ای با نا پیوستگی ها در ω_i می‌باشد.

پرش های نا پیوستگی در $\omega_i \neq 0$ را با $2\pi C_i$ نشان می‌دهیم.

این پرش ها با پرش های $Z_p(\omega)$ برابر هستند.

پرش در $\omega = 0$ را به صورت مجموع $2\pi(\eta + C_0)$ بیان می‌کنیم که در آن
$\eta = E\{X(t)\}$ بوده و عبارت $2\pi\eta$ را به $Z_r(\omega)$ نسبت می‌دهیم.
بنابراین در $\omega = 0$ فرآیند $Z_r(\omega)$ دارای نا پیوستگی با پرش $2\pi\eta$ می‌باشد.
پرش $Z_p(\omega)$ در $\omega = 0$ برابر $2\pi C_0$ است.
با قرار دادن رابطهٔ (۷-۹۲) در (۷-۸۷)، تجزیه (۷-۸۹) مربوط به $X(t)$
به دست می‌آید که در آن $X_r(t)$ و $X_p(t)$
به ترتیب مؤلفه های حاصل از $Z_r(\omega)$ و $Z_p(\omega)$ می‌باشند.
با توجه به (۷-۸۵) نتیجه می‌شود که $Z_r(\omega)$ و $Z_p(\omega)$ دو فرآیند با نمو
متعامد بوده و

$$E\{\mathbf{Z}_r(U)\mathbf{Z}_p^*(V)\} = 0 \quad , E\{C_i . C_j^*\} = \begin{cases} k_i \ , & i=j \\ 0 \ , & i \neq j \end{cases} \qquad (۷-۹۳)$$

معادله اول نشان می‌دهد که فرآیندهای $X_r(t)$ و $X_p(t)$
مانند (۷-۹۱) متعامد هستند و معادلهٔ دوم بیان می‌کند که ضرایب C_i فرآیند
$X_p(t)$ متعامد می‌باشند.
این خاصیت در واقع محصول ایستان بودن فرآیند $X_p(t)$ است.
طیف های $X_r(t)$ و $X_p(t)$ را به ترتیب با $S_r(\omega)$ و $S_p(\omega)$
و طیف های انتگرالی $X_r(t)$ و $X_p(t)$ را به ترتیب با $F_r(\omega)$ و $F_p(\omega)$
توصیف می‌کنیم.
با استناد به روابط (۷-۸۹) و (۷-۹۱) می‌توان نوشت

$$S(\omega) = S_r(\omega) + S_p(\omega) \quad , F(\omega) = F_r(\omega) + F_p(\omega) \qquad (۷-۹۴)$$

عبارت $F_r(\omega)$ در $\omega \neq 0$ پیوسته بوده و در $\omega = 0$ ناپیوسته با پرش
$2\pi\eta^2$ است.
عبارت $F_p(\omega)$ تابع پله ای است که در نقاط ω_i ناپیوسته با پرش های
$2\pi k_i$ می‌باشد. پس

$$S_p(\omega) = 2\pi k_0 \delta(\omega) + 2\pi \sum_i k_i \delta(\omega - \omega_i) \qquad (۷-۹۵)$$

تابع ضربه در مبدأ $S(\omega)$ برابر $2\pi(k_0 + \eta^2)\delta(\omega)$ است

مثال ۱۰-۷

فرآیند $E\{a\} = 0$ و $Y(t) = aX(t)$ را که در آن $X(t)$
فرآیند عادی و مستقل از a است در نظر بگیرید.
تجزیه Wold آن را تعیین می‌کنیم.
با توجه به فرض های مثال، می‌توان نتیجه گرفت که

$$E\{Y(t)\} = 0 \;, R_{yy}(\tau) = E\{a^2 X(t+\tau)X(t)\} = \sigma_a^2 R_{xx}(\tau)$$

طیف $X(t)$ با $S_{xx}^c(\omega) + 2\pi\eta_x^2\delta(\omega)$ برابر است. بنابراین

$$S_{yy}(\omega) = \sigma_a^2 S_{xx}^c(\omega) + 2\pi\sigma_a^2\eta_x^2\delta(\omega)$$

با استناد به عادی بودن $X(t)$ می‌توان گفت که طیف کوواریانس
$S_{xx}^c(\omega)$ فاقد هر گونه ضربه (ایمپالس) است.
از آن جا که $\eta_y = 0$ می‌باشد با توجه به رابطهٔ (۹۵-۷) داریم

$$S_p(\omega) = 2\pi k_0 \delta(\omega)$$

که در آن $k_0 = \sigma_a^2 \eta_x^2$ می‌باشد پس

$$Y_p(t) = \eta_x a \quad , \quad Y_r(t) = a[X(t) - \eta_x]$$

فرآیندهای گسسته زمان

فرآیند گسسته زمان $X[n]$ داده شده است. تبدیل فوریه آن را تشکیل می‌دهیم

$$\mathbf{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\, e^{-jn\omega} \qquad (۷-۹۶)$$

و نیز

$$X[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{X}(\omega)\, e^{jn\omega}\, d\omega \qquad (۷-۹۷)$$

بنا به تعریف می‌توان گفت که فرآیند $\mathbf{X}(\omega)$ با تناوب 2π متناوب است.
بنابراین کافی است که خواص آن را فقط دربارهٔ $|\omega| < \pi$ بررسی نماییم.
با اصلاح مناسب نتایج به دست آمده در بخش های قبل
می‌توان آنها را در مورد فرآیندهای گسسته زمان نیز به کار برد.

در اینجا فقط شکل دیجیتال رابطهٔ (۷۶–۷) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
اگر $X[n]$ فرآیند WSS با طیف توان $S(\omega)$ باشد،
در آن صورت تبدیل فوریهٔ آن $X(\omega)$ نویز سفید غیر ایستان با اتوکوواریانس
زیر خواهد بود

$$E\{\mathbf{X}(U)\mathbf{X}^*(V)\} = ۲\pi S(U)\delta(U-V) \qquad -\pi < U, V < \pi \qquad (۷\text{–}۹۸)$$

به منظور اثبات از تساوی زیر استفاده می‌کنیم

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega} = ۲\pi\delta(\omega) \qquad , \qquad |\omega| < \pi$$

بدیهی است که

$$E\{\mathbf{X}(U)\mathbf{X}^*(V)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{X[n+m]X^*[m]\}$$

$$\exp\{-j[(m+n)U - nV]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn(U-V)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m]e^{-jmU}$$

و رابطهٔ (۹۸–۷) به دست می‌آید

۵–۷ فرآیندهای ارگودیک (Ergodic)

مسأله اساسی در کاربردهای فرآیندهای تصادفی،
تخمین پارامترهای آماری مختلف برحسب داده های واقعی است.
اغلب پارامترها را می‌توان به صورت مقدار قابل انتظارتوابعی از فرآیند
$X(t)$ بیان کرد.
بنابراین، مسأله تخمین مقدار متوسط فرآیند مفروض $X(t)$،
در این بررسی از اهمیت به سزایی برخوردار است.
به ازاء t معین و مشخص، $X(t)$ یک متغیر تصادفی بوده و مقدار متوسط آن
$\eta(t) = E\{X(t)\}$ را می‌توان تخمین زد.
در واقع n نمونه $X(t, \xi_i)$ مربوط به $X(t)$ را مشاهده کرده
و متوسط زیر را به عنوان تخمین نقطه ای $E\{X(t)\}$
به کار می‌بریم

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{n} \sum_i X(t, \xi_i)$$

همان طور که می‌دانیم $\hat{\eta}(t)$ تخمین سازگار از $\eta(t)$ است،
به هر حال، آن را هنگامی می‌توان به کار برد که تعداد زیادی از تحقق های $X(t, \xi_i)$ مربوط به $X(t)$ در دست باشد.
در بسیاری از کاربردها، فقط یک نمونه تنها از $X(t)$ را می‌شناسیم یا داریم.
آیا در این صورت می‌توانیم $\eta(t)$ را بر حسب متوسط زمانی نمونه مذکور تخمین بزنیم؟
اگر $E\{X(t)\}$ به t وابسته باشد این امر امکان پذیر نیست.
به هر حال اگر $X(t)$ فرآیند ایستان عادی باشد، با افزایش تعداد نمونه های موجود و میل کردن آن به ∞، متوسط زمانی $X(t)$ به $E\{X(t)\}$ میل خواهد کرد.

در بخش های زیر چند نوع مهّم از خواص ارگودیک بودن فرآیندهای تصادفی را مورد بحث قرار می‌دهیم

فرآیندهای ارگودیک در متوسط [Mean - Ergodic (ME)]

فرآیند ایستان حقیقی $X(t)$ را در نظر بگیرید.
می‌خواهیم متوسط آن $\eta = E\{X(t)\}$ را تخمین بزنیم.
بدین منظور متوسط زمانی آن را تشکیل می‌دهیم

$$\eta_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\, dt \qquad (۷-۹۹)$$

بدیهی است که η_T یک متغیر تصادفی با متوسط زیر است

$$E\{\eta_T\} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E\{X(t)\}\, dt = \eta$$

بنابراین η_T یک تخمین بایاس نشده از η است.

به ازاء $T \to \infty$، واریانس تخمین، $\sigma_T^2 \to 0$ میل کرده و در این حالت

η_T از نظر مفهوم MS به η میل می‌کند.

در این مورد، متوسط زمانی $\eta_T(\xi)$ محاسبه شده از یک تحقق تنهای $X(t)$

با احتمال یک به η نزدیک است.

اگر چنین شرایطی فراهم شود، می‌گوییم که فرآیند $X(t)$

ارگودیک در متوسط (ME) است.

بنابراین فرآیند $X(t)$ هنگامی ارگودیک در متوسط است که متوسط زمانی آن

η_T به ازاء $T \to \infty$ به متوسط مجموعه η میل کند.

برای تعیین ارگودیک بودن یک فرآیند، کافی است که σ_T

را به دست آورده و شرایطی را که تحت آن به ازاء $T \to \infty$، $\sigma_T \to 0$

میل می‌کند بررسی نماییم.

دو مثال زیر نشان می‌دهد که تمام فرآیندها ارگودیک در متوسط نیستند

مثال ۱۱–۷

تصور کنید که C یک متغیر تصادفی با متوسط η_C و

$$X(t) = C \ , \ \eta = E\{X(t)\} = E\{C\} = \eta_C$$

می‌باشد.

در این مورد، $X(t)$ خانواده ای از خطوط مستقیم بوده و $\eta_T = C$ است.

برای یک نمونه بخصوص، $\eta_T(\xi) = C(\xi)$

مقدار ثابتی است که با η تفاوت دارد مشروط بر آن که $C(\xi) \neq \eta$ باشد.

بنابراین $X(t)$ ارگودیک در متوسط نیست

مثال ۱۲–۷

دو فرآیند ارگودیک در متوسط $X_۲(t)$ و $X_۱(t)$

با متوسط های $\eta_۲$ و $\eta_۱$ داده شده اند، مجموع

$$X(t) = X_۱(t) + C\, X_۲(t)$$

را که در آن C متغیر تصادفی مستقل از $X_۲(t)$ بوده و مقادیر ۱ و ۰

را با احتمال یکسان اختیار می‌کند در نظر می‌گیریم.

آشکار است که

$$E\{ X(t) \} = E\{ X_۱(t) \} + E\{ C \}\, E\{ X_۲(t) \} = \eta_۱ + ۰/۵\, \eta_۲$$

اگر $C(\xi) = ۰$ به ازاء ξ بخصوصی باشد در آن صورت $X(t) = X_۱(t)$

بوده به ازاء $T \to \infty$، $\eta_T \to \eta_۱$ میل خواهد کرد

اگر به ازاء مقدار دیگر ξ، $C(\xi) = ۱$ باشد، آن گاه

$$X(t) = X_۱(t) + X_۲(t)$$

بوده و $\eta_T = \eta_۱ + \eta_۲$ به ازاء $T \to \infty$ خواهدشد.

بنابراین فرآیند $X(t)$ ارگودیک در متوسط نیست

واریانس

برای تعیین واریانس $\sigma_T^۲$ متوسط زمانی η_T مربوط به $X(t)$

از این نکته شروع می‌کنیم که

$$\eta_T = W(۰) \quad \text{که} \quad W(t) = \frac{۱}{۲T}\int_{t-T}^{t+T} X(\alpha)\, d\alpha \qquad (۷–۱۰۰)$$

متوسط متحرک $X(t)$ است، همان گونه که می‌دانیم $W(t)$

خروجی سیستم خطی با ورودی $X(t)$ و پاسخ ضربه پالسی متمرکز در $t = ۰$

می‌باشد.

بنابراین $W(t)$ ایستان بوده و اتوکوواریانس آن برابر است با

$$C_{ww}(\tau) = \frac{۱}{۲T}\int_{-۲T}^{۲T} C(\tau - \alpha)\left(۱ - \frac{|\alpha|}{۲T}\right) d\alpha \qquad (۷–۱۰۱)$$

که در آن $C(\tau)$ اتوکوواریانس $X(t)$ می‌باشد. از آن جا که

$$\sigma_T^2 = \operatorname{Var} W(0) = C_{ww}(0) \quad \text{و} \quad C(-\alpha) = C(\alpha)$$

است می‌توان نوشت

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C(\alpha)\left(1 - \frac{|\alpha|}{2T}\right)d\alpha = \frac{1}{T}\int_{0}^{2T} C(\alpha)\left(1 - \frac{\alpha}{2T}\right)d\alpha \qquad (۷-۱۰۲)$$

این نتیجه اساسی بیان می‌کند که: فرآیند $X(t)$

با اتوکوواریانس $C(\tau)$ فقط هنگامی ارگودیک در متوسط است که

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{2T} C(\alpha)\left(1 - \frac{\alpha}{2T}\right)d\alpha \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \qquad (۷-۱۰۳)$$

تعیین واریانس η_T نه تنها در بررسی ارگودیک بودن $X(t)$ مفید است
بلکه در تعیین بازهٔ اطمینان برای تخمین η_T مربوط به η نیز سودمند می‌باشد.
در حقیقت با استناد به نامساوی چیپی چف می‌توان گفت که احتمال
قرار داشتن مجهول η دربازهٔ $\eta_T \pm 10\,\sigma_T$ بزرگتر از ۰/۹۹ است.
بنابراین اگر T به نحوی باشد که $\sigma_T << \eta$ باشد در آن صورت η_T
تخمین رضایت بخشی از η خواهد بود.

مثال ۱۳-۷

فرآیندی با اتوکوواریانس $C(\tau) = q\,e^{-c|\tau|}$ را در نظر بگیرید.
در این حالت

$$\sigma_T^2 = \frac{q}{T}\int_{0}^{2T} e^{-C\tau}\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)d\tau = \frac{q}{CT}\left(1 - \frac{1 - e^{-2CT}}{2CT}\right)$$

بدیهی است که به ازاء $T \to \infty$ ، $\sigma_T \to 0$ میل می‌کند،
پس $X(t)$ فرآیند ارگودیک در متوسط است.

اگر $T >> \frac{1}{C}$ باشد آن گاه $\sigma_T^2 \simeq \frac{q}{CT}$ خواهد بود.

مثال ۱۴-۷

فرض کنید که $X(t) = \eta + \gamma(t)$ و $\gamma(t)$ نویز سفید با $R_{\gamma\gamma}(\tau) = q\delta(\tau)$ می‌باشد. در این حالت $C(\tau) = R_{\gamma\gamma}(\tau)$ بوده و رابطهٔ (۱۰۲-۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} q\delta(\tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right)d\tau = \frac{q}{2T}$$

پس $X(t)$ ارگودیک در متوسط است.

با توجه به رابطهٔ (۱۰۳-۷) بدیهی است که ارگودیک بودن فرآیند به رفتار $C(\tau)$ به ازاء τ بزرگ بستگی دارد.

اگر به ازاء $\tau > a$، $C(\tau) = 0$ باشد یعنی $X(t)$ فرآیند a - وابسته بوده و $T >> a$ باشد آن گاه

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T}\int_0^a C(\tau)\left(1 - \frac{\tau}{2T}\right)d\tau \simeq \frac{1}{T}\int_0^a C(\tau)\,d\tau < \frac{a}{T}C(0) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

و چون $|C(\tau)| < C(0)$ است پس $X(t)$ ارگودیک در متوسط خواهد بود.

در بسیاری از کاربردها، متغیرهای تصادفی $X(t+\tau)$ و $X(t)$ به ازاء τ بزرگ تقریباً نا هم بسته هستند یعنی، به ازاء $\tau \to \infty$، $C(\tau) \to 0$ میل می‌کند.

بحث فوق نشان می‌دهد که در چنین شرایطی $X(t)$ ارگودیک در متوسط بوده و به ازاء T بزرگ، واریانس η_T را می‌توان به صورت زیر تقریب زد

$$\sigma_T^2 \simeq \frac{1}{T}\int_0^{2T} C(\tau)\,d\tau \simeq \frac{1}{T}\int_0^{\infty} C(\tau)\,d\tau = \frac{\tau_c}{T}C(0) \quad (۷-۱۰۴)$$

که τ_c زمان هم بستگی $X(t)$ یعنی

$$\tau_c = \frac{1}{C(0)}\int_0^{\infty} C(\tau)\,d\tau$$

می‌باشد.

نتیجهٔ مذکور را در قضیهٔ زیر اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ SLUTSKY

فرآیند $X(t)$ ارگودیک در متوسط است اگر و فقط اگر

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} C(\tau)\, d\tau \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \qquad (۷-۱۰۵)$$

برای اثبات دو مورد زیر را در نظر می‌گیریم.

الف) ابتدا نشان می‌دهیم که اگر به ازاء $T \to \infty$، σ_T به صفر میل کند در آن صورت رابطهٔ (۷-۱۰۵) صادق است.

کوواریانس متغیرهای تصادفی η_T و $X(0)$ برابر است با

$$\operatorname{cov}[\eta_T, X(0)] = E\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[X(t)-\eta][X(0)-\eta]\,dt\} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} C(t)\,dt$$

ولی می‌دانیم که

$$\operatorname{cov}^2[\eta_T, X(0)] \le \operatorname{Var}\eta_T \operatorname{Var} X(0) = \sigma_T^2\, C(0)$$

بنابراین اگر $\sigma_T \to 0$ میل کند در آن صورت رابطهٔ (۷-۱۰۵) صادق است.

ب) اکنون ثابت می‌کنیم که اگر رابطهٔ (۷-۱۰۵) برقرار باشد در آن صورت به ازاء $T \to \infty$، σ_T به صفر میل خواهد کرد

با توجه به رابطهٔ (۷-۱۰۵) می‌توان گفت که به ازاء $\varepsilon > 0$ مفروض، می‌توان ثابت C_0 را به نحوی تعیین کرد که

$$\frac{1}{t}\int_{c}^{t} C(\tau)\, d\tau < \varepsilon \quad ، \quad C > C_0 \quad \text{به ازاء جمع مقادیر} \qquad (۷-۱۰۶)$$

واریانس η_T برابر است با

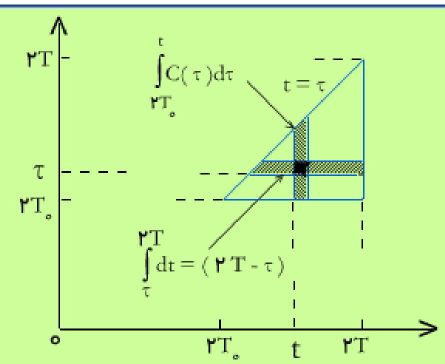
$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T}\int_0^{2T_0} + \frac{1}{T}\int_{2T_0}^{2T} C(\tau)\left(1-\frac{\tau}{2T}\right) d\tau$$

انتگرال از ۰ تا $2T_0$ کوچکتر از $2T_0 C(0)/T$ است

چون $|C(\tau)| \le C(0)$ می‌باشد. پس

$$\sigma_T^2 < \frac{2T_0}{T} C(0) + \frac{1}{T}\int_{2T_0}^{2T} C(\tau)\left(1-\frac{\tau}{2T}\right) d\tau$$

ولی (شکل ۶–۷ را ببینید

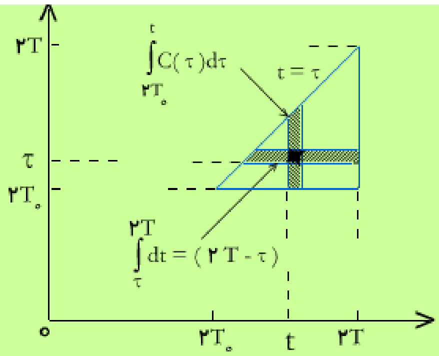


(شکل ۶–۷)

$$\int_{2T_0}^{2T} C(\tau)(2T-\tau)\, d\tau = \int_{2T_0}^{2T} C(\tau)\int_{\tau}^{2T} dt\, d\tau = \int_{2T_0}^{2T}\int_{2T_0}^{t} C(\tau)\, d\tau\, dt$$

با استناد به رابطهٔ (۶–۱۰–۷) می‌توان گفت

که انتگرال داخلی در طرف راست کمتر از ε است بنابراین



(شکل ۶-۷)

$$\sigma_T^۲ < \frac{۲T_\circ}{T} C(\circ) + \frac{\varepsilon}{T^۲}\int_{۲T_\circ}^{۲T} t\,dt \xrightarrow[T\to\infty]{} ۲\varepsilon$$

و چون ε مقداری دلخواه است نتیجه می‌گیریم که به ازاء $T \to \infty$ ، σ_T

مثال ۱۵-۷

فرآیند زیر را که در آن a و b دو متغیر تصادفی با متوسط صفر و واریانس یکسان هستند، در نظر بگیرید.

$$X(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t + c$$

می‌دانیم که $X(t)$ فرآیندی WSS با متوسط C و اتوکوواریانس $\sigma^۲\cos\omega\tau$ می‌باشد.

نشان می‌دهیم که $X(t)$ ارگودیک در متوسط است.

در واقع با توجه به (۵-۱۰-۷) می‌توان ادعا کرد که

$$\frac{۱}{T}\int_{\circ}^{T} C(\tau)\,d\tau = \frac{\sigma^۲}{T}\int_{\circ}^{T}\cos\omega\tau\,d\tau = \frac{\sigma^۲}{\omega T}\sin\omega T \xrightarrow[T\to\infty]{} \circ$$

شرایط کافی

الف) اگر

$$\int_{0}^{\infty} C(\tau)\, d\tau < \infty \qquad (۷–۱۰۷)$$

باشد در آن صورت رابطهٔ (۷–۱۰۵) صادق بوده و در نتیجه فرآیند $X(t)$ ارگودیک در متوسط است.

ب) اگر $R(\tau) \to \eta^2$ یا معادلاً اگر

$$C(\tau) \to 0 \qquad \text{به ازاء} \quad \tau \to \infty \qquad (۷–۱۰۸)$$

آن گاه $X(t)$ ارگودیک در متوسط است.

به منظور اثبات باید گفت اگر (۷–۱۰۷) صادق باشد در آن صورت به ازاء $\varepsilon > 0$ مفروضی می‌توان ثابت T_0 را به نحوی تعیین کرد که

$|C(\tau)| < \varepsilon$ **به ازاء** $\tau > T_0$ **باشد.**

بنابراین

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} C(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T}\int_{0}^{T_0} C(\tau)\, d\tau + \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T} C(\tau)\, d\tau$$

$$< \frac{T_0}{T} C(0) + \varepsilon \frac{T - T_0}{T} \xrightarrow[T \to \infty]{} \varepsilon$$

و چون ε دلخواه است نتیجه می‌گیریم که رابطهٔ (۷–۱۰۵) صادق است.

شرط (۷–۱۰۸) هنگامی اقناع می‌شود که

متغیرهای تصادفی $X(t+\tau)$ و $X(t)$ به ازاء τ بزرگ نا هم بسته باشند

فرآیندهای گسسته زمان

در این بخش نسخهٔ گسسته زمان نتایج به دست آمده در مباحث قبل را بدون اثبات بررسی و معرفی می‌نماییم.

فرض کنید فرآیند حقیقی ایستان $x[n]$ با اتوکوواریانس $C[m]$ در دست است. متوسط زمانی زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\eta_M = \frac{1}{N}\sum_{n=-M}^{M} x[n] \quad , \quad N = 2M+1 \qquad (۷-۱۰۹)$$

این متوسط یک تخمین بایاس نشده از متوسط آماری $x[n]$ بوده و واریانس آن برابر است با

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{N}\sum_{m=-2M}^{2M} C[m]\left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \qquad (۷-۱۱۰)$$

اگر طرف راست رابطهٔ (۷-۱۱۰) به ازاء $M \to \infty$ به صفر میل کند در آن صورت $X[n]$ ارگودیک در متوسط خواهد بود.

قضیهٔ SLUTSKY در مورد فرآیندهای گسسته زمان را می‌توان بدین صورت بیان کرد.

فرآیند $X[n]$ ارگودیک در متوسط است اگر و فقط اگر

$$\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M} C[m] \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \qquad (۷-۱۱۱)$$

می‌توان نشان داد که مشابه (۷-۱۰۸) اگر به ازاء $m \to \infty$، $C[m] \to 0$ میل کند آن گاه $X[n]$ ارگودیک در متوسط است. به ازاء M بزرگ

$$\sigma_M^2 \simeq \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M} C[m] \qquad (۷-۱۱۲)$$

مثال ۱۶–۷

الف) فرض کنید که فرآیند تمرکز یافتهٔ $\tilde{X}[n] = X[n] - \eta$
نویز سفید با اتوکوواریانس $p\delta[m]$ **می‌باشد.**
در این مورد

$$C[m] = p\delta[m] \quad , \quad \sigma_M^2 \simeq \frac{1}{N}\sum_{m=-M}^{M} p\delta[m] = \frac{P}{N}$$

بنابراین $X[n]$ **ارگودیک در متوسط بوده و واریانس** η_M **با** $\frac{P}{N}$
برابر است.

متغیرهای تصادفی $X[n]$ **متغیرهای مستقل با توزیع یکسان بوده و واریانس آنها**
$C[0] = p$ **و متوسط زمانی** η_M **متوسط نمونه آنها می‌باشد.**

ب) فرض کنید که $C[m] = p\,a^{|m|}$ **می‌باشد.**

در این حالت بر اساس رابطهٔ (۱۱۲–۷) می‌توان نوشت.

$$\sigma_M^2 \simeq \frac{1}{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty} p\,a^{|m|} = \frac{p(1+a)}{N(1-a)}$$

توجه کنید که اگر به جای $X[n]$ **، نویز سفید مورد الف با همان** P
را در نظر گرفته و از متوسط زمانی N_1 **نمونه به عنوان تخمین** η **استفاده کنیم،**
واریانس $\frac{P}{N_1}$ **تخمین گر حاصله هنگامی برابر** σ_M^2 **خواهد بود که**

$$N_1 = N\,\frac{1-a}{1+a}$$

تعبیر طیفی خاصیت ارگودیک

شرایط ارگودیک را می‌توان بر حسب خواص طیف کوواریانس

$$S^c(\omega) = S(\omega) - 2\pi\,\eta^2\,\delta(\omega)$$

فرآیند $X(t)$ بیان کرد.

واریانس σ_T^2 مربوط به η_T با واریانس متوسط متحرک $W(t)$ مربوط به $X(t)$ برابر است.

همان طور که می‌دانیم

$$S^c_{ww}(\omega) = S^c(\omega)\,\frac{\sin^2 T\omega}{T^2\omega^2} \qquad (۷-۱۱۳)$$

بنابراین

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^c(\omega)\,\frac{\sin^2 T\omega}{T^2\omega^2}\,d\omega \qquad (۷-۱۱۴)$$

کسر رابطهٔ (۷-۱۱۴) فقط دربازه ای از مرتبهٔ $\frac{1}{T}$ حول مبدأ مقادیر قابل ملاحظه ای را اختیار می‌کند.

بنابراین شرایط ارگودیک بودن $X(t)$ فقط به رفتار $S^c(\omega)$ حول مبدأ بستگی دارد.

ابتدا فرض کنید که فرآیند $X(t)$ عادی است. در این حالت، $S^c(\omega)$ فاقد ایمپالس در $\omega = 0$ است.

بنابراین اگر T به اندازهٔ کافی بزرگ باشد می‌توان از تقریب

$$S^c(\omega) \simeq S^c(0)$$

در رابطهٔ (۷-۱۱۴) استفاده کرده و نوشت

$$\sigma_T^2 \simeq \frac{S^c(0)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 T\omega}{T^2\omega^2}\,d\omega = \frac{S^c(0)}{2T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \qquad (7-115)$$

بنابراین $X(t)$ ارگودیک در متوسط است. اکنون فرض کنید که

$$S^c(\omega) = S_1^c(\omega) + 2\pi k_0\delta(\omega)\ ,\ S_1^c(0) < \infty \qquad (7-116)$$

با قرار دادن فرض فوق در رابطهٔ (۷-۱۱۴) داریم

$$\sigma_T^2 \simeq \frac{1}{2T}\, S_1(0) + k_0 \xrightarrow[T\to\infty]{} k_0$$

بنابراین $X(t)$ ارگودیک در متوسط نیست

این مورد در واقع هنگامی پیش می‌آید که در تجزیهٔ Wold
عبارت ثابت C_0 با مقدار صفر متفاوت باشد یا به عبارت دیگر، تبدیل فوریه
$X(\omega)$ فرآیند $X(t)$ شامل ایمپالس

$$2\pi C_0\delta(\omega)$$

مثال۷۱–۷

فرآیند

$$Y(t) = a\,X(t)\ ,\ E\{a\} = 0$$

را که در آن $X(t)$ فرآیند ارگودیک در متوسط و مستقل از متغیر تصادفی a است،
در نظر بگیرید. بدیهی است که

$$E\{Y(t)\} = 0$$

می‌باشد. همچنین

$$S^{c}_{yy}(\omega) = \sigma^{2}_{a}\,S^{2}_{xx}(\omega) + 2\pi\,\sigma^{2}_{a}\,\eta^{2}_{x}\,\delta(\omega)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که فرآیند $Y(t)$ ارگودیک در متوسط نیست

بررسی فوق بیان می‌کند که شرایط معادل ارگودیک در متوسط بودن عبارتند از

۱- به ازاء $T \to \infty$، σ_T باید به صفر میل کند.

۲- در تجزیه Wold، عبارت تصادفی ثابت C_0 باید صفر باشد.

۳- طیف توان انتگرالی $F^{c}(\omega)$ باید در مبدأ پیوسته باشد.

۴- تبدیل فوریه انتگرالی $Z(\omega)$ باید در مبدأ پیوسته باشد.

فرآیندهای ارگودیک در کوواریانس

اکنون شرایطی را تعیین خواهیم کرد که فرآیند SSS، $X(t)$
باید آن ها را ارضاء کرده و به تبع آن بتوان اتوکوواریانس $C(\lambda)$
را به صورت متوسط زمانی تخمین زد.
نتایج به دست آمده اساساً برای تخمین های خود بستگی $R(\lambda)$ مربوط به
$X(t)$ نیز صادق است.

واریانس

بحث را از تخمین واریانس $X(t)$ یعنی

$$V = C(0) = E\{\,|X(t) - \eta|^{2}\} = E\{X^{2}(t)\} - \eta^{2} \qquad (7\text{-}117)$$

متوسط معلوم

ابتدا فرض کنید که η معلوم است.

در این صورت می‌توان با جایگزین کردن فرآیند تمرکز یافته $X(t) - \eta$
به جای $X(t)$، فرض کرد که

$$E\{X(t)\} = 0 \quad , \quad V = E\{X^2(t)\}$$

پس مسأله تخمین متوسط V فرآیند $X^2(t)$ است.

مشابه مورد مندرج در رابطهٔ (۹۹–۷)، به عنوان تخمین V از متوسط زمانی

$$V_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)\, dt \qquad (7\text{-}118)$$

استفاده می‌کنیم.

این تخمین بایاس نشده بوده و واریانس آن توسط رابطهٔ (۱۰۲–۷) تعیین می‌شود
مشروط بر آن که به جای تابع $C(\tau)$ از اتوکوواریانس

$$C_{x^2x^2}(\tau) = E\{X^2(t+\tau)\, X^2(t)\} - E^2\{X^2(t)\} \qquad (7\text{-}119)$$

مربوط به فرآیند $X^2(t)$ استفاده گردد.

با اعمال رابطهٔ (۱۰۵–۷) به این فرآیند، نتیجه می‌گیریم که $X(t)$
هنگامی ارگودیک در واریانس است که

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} E\{X^2(t+\tau)\, X^2(t)\}\, dt \xrightarrow[T\to\infty]{} C^2(0) \qquad (7\text{-}120)$$

برای بررسی صحّت و اعتبار رابطهٔ فوق، به گشتاورهای مرتبهٔ چهار $X(t)$
نیاز است ولی به هر حال اگر $X(t)$ فرآیندی نرمال باشد

آن گاه

$$C_{x^2x^2}(\tau) = 2\,C^2(\tau) \qquad (7\text{-}121)$$

با توجه به رابطهٔ (۷-۱۲۰) می‌توان ادعا کرد که فرآیند نرمال هنگامی ارگودیک در واریانس است که

$$\frac{1}{T}\int_0^T C^2(\tau)\,d\tau \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \qquad (7\text{-}122)$$

با استفاده از نا مساوی سادهٔ

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T C(\tau)\,d\tau\right|^2 \le \frac{1}{T}\int_0^T C^2(\tau)\,d\tau$$

نتیجه می‌گیریم که با توجه به روابط (۷-۱۰۵) و (۷-۱۲۲)، اگر فرآیند نرمال ارگودیک در واریانس باشد هم چنین ارگودیک در متوسط خواهد بود.

به هر حال معکوس این مطلب صحّت ندارد.

این قضیه دارای چنین تعبیر طیفی است:

فرآیند $X(t)$ ارگودیک در متوسط خواهد بود اگر و فقط اگر $S^C(\omega)$ فاقد ایمپالس هایی در مبدأ باشد و فرآیند مذکور ارگودیک در واریانس خواهد بود اگر و فقط اگر

$S^C(\omega)$ فاقد ایمپالس هایی در هر جایی باشد.

مثال ۱۸–۷

فرض کنید که فرآیند

$$X(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t + \eta$$

نرمال و ایستان است.

بدیهی است که $X(t)$ ارگودیک در متوسط است چون شامل ثابت تصادفی نیست.

به هر حال ارگودیک در واریانس نمی‌باشد چون مربع

$$|X(t) - \eta|^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2\cos 2\omega t - b^2\cos 2\omega t) + ab\sin\omega t$$

مربوط به $X(t) - \eta$ شامل ثابت تصادفی $\frac{a^2 + b^2}{2}$ است.

متوسط نامعلوم

اگر η نامعلوم باشد تخمین آن یعنی η_T

را با استفاده از رابطهٔ (۹۹–۷) محاسبه کرده و متوسط زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\hat{V}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[X(t) - \eta_T]^2 dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)\,dt - \eta_T^2$$

تعیین خصوصیات آماری $\hat{V}_T$ امری مشکل است.

به هر حال، ملاحظات زیر، مسأله را آسان تر می‌سازد.

به طور کلی، $\hat{V}_T$ یک تخمین بایاس شده از واریانس V مربوط به $X(t)$ است.

به هر صورت، اگر T بزرگ باشد، می‌توان در تعیین خطای تخمین از بایاس صرفنظر کرد.

علاوه بر این، واریانس $\hat{V}_T$ را می‌توان توسط واریانس تخمین با متوسط معلوم V_T تقریب زد.

در بسیاری موارد، به ازاء مقادیر معمول T، خطای MS، یعنی $E\{(\hat{V}_T - V)^2\}$ از $E\{(V_T - V)^2\}$ کوچکتر است.

بنابراین ارجحیت دارد که حتی در هنگامی که η معلوم است از $\hat{V}_T$ به عنوان تخمین V استفاده شود

اتوکوواریانس

شرایط ارگودیک بودن برای اتوکوواریانس $C(\lambda)$ مربوط به فرآیند $X(t)$ را با فرض $E\{X(t)\} = 0$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اگر η معلوم باشد می‌توان امر فوق را با جایگزین کردن $X(t) - \eta$ به جای $X(t)$ انجام داد.

اگر η نامعلوم باشد به جای $X(t)$، $X(t) - \eta_T$ را قرار می‌دهیم.

در این حالت، نتایج تقریباً صحیح خواهند بود مشروط بر آن که T بزرگ باشد.

به ازاء λ مشخص، حاصل ضرب $X(t+\lambda)\,X(t)$ فرآیندی SSS با متوسط $C(\lambda)$ است.

بنابراین می‌توان به عنوان تخمین $C(\lambda)$ از متوسط زمانی زیر استفاده کرد

$$C_T(\lambda) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Z(t)dt \;,\; Z(t) = X(t+\lambda)\,X(t) \qquad (۷-۱۲۳)$$

این تخمین بایاس نشده ای از $C(\lambda)$ **بوده و واریانس آن**

توسط رابطهٔ (۱۰۲-۷) تعیین می‌گردد مشروط بر آن که به جای اتوکوواریانس

$X(t)$ **از اتوکوواریانس**

$$C_{zz}(\tau) = E\{ X(t+\lambda+\tau)\,X(t+\tau)\,X(t+\lambda)\,X(t) \} - C^{2}(\lambda)$$

مربوط به فرآیند $Z(t)$ **استفاده شود. با اعمال قضیهٔ** Slutsky

نتیجه می‌گیریم که فرآیند $X(t)$ **ارگودیک در کوواریانس خواهد بود اگر و فقط اگر**

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} C_{zz}(\tau)\,d\tau \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \qquad (۷-۱۲۴)$$

اگر $X(t)$ **فرآیندی نرمال باشد**

$$C_{zz}(\tau) = C(\lambda+\tau)\,C(\lambda-\tau) + C^{2}(\tau) \qquad (۷-۱۲۵)$$

در این حالت، رابطهٔ (۱۰۴-۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\operatorname{Var} C_{T}(\lambda) \simeq \frac{1}{T}\int_{0}^{2T} [\,C(\lambda+\tau)\,C(\lambda-\tau) + C^{2}(\tau)\,]\,d\tau \qquad (۷-۱۲۶)$$

با توجه به رابطهٔ (۱۲۵-۷) می‌توان گفت که اگر $C(\tau) \to 0$

در آن صورت به ازاء $\tau \to \infty$، $C_{zz}(\tau) \to 0$ **میل کرده و در نتیجه**

$X(t)$ **ارگودیک در کوواریانس است.**

کوواریانس متقابل

توضیح مختصری در مورد تخمین کوواریانس متقابل $C_{xy}(\tau)$
دو فرآیند با متوسط صفر $Y(t)$ و $X(t)$ ، ارائه می‌شود.
مشابه رابطهٔ (۷-۱۲۳)، متوسط زمانی

$$\hat{C}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau)\, Y(t)\, dt \qquad (۷-۱۲۷)$$

تخمین بایاس نشده ای از $C_{xy}(\tau)$
بوده و واریانس آن توسط رابطهٔ (۷-۱۰۲) تعیین می‌گردد مشروط بر آن که به جای $C(\tau)$ از $C_{xy}(\tau)$ استفاده کنیم. اگر به ازاء $\tau \to \infty$
توابع $C_{xy}(\tau)$ و $C_{yy}(\tau)$ ، $C_{xx}(\tau)$ به صفر میل کنند
در آن صورت فرآیندهای $X(t)$ و $Y(t)$ ارگودیک در کوواریانس متقابل هستند.

تخمین غیر خطی

محاسبهٔ عددی تخمین $C_t(\lambda)$ از $C(\lambda)$ شامل محاسبه انتگرال حاصل ضرب $X(t+\lambda)\, X(t)$ به ازاء مقادیر مختلف λ می‌باشد.
اکنون نشان می‌دهیم که اگر به جای یک یا دو عامل این حاصل ضرب تابعی از $X(t)$ را جایگزین کنیم در برخی موارد محاسبات ساده تر خواهد بود.
فرض می‌کنیم که فرآیند $X(t)$ نرمال با متوسط صفر است

قانون آرک سینوس

در رابطهٔ (۶۰-۵) نشان دادیم که اگر $Y(t)$
خروجی محدود کنندهٔ سخت با ورودی $X(t)$ باشد.

$$Y(t) = \operatorname{sgn} X(t) = \begin{cases} ۱ , & X(t) > ۰ \\ -۱ , & X(t) < ۰ \end{cases}$$

در آن صورت

$$C_{yy}(\tau) = \frac{۲}{\pi} \arcsin \frac{C_{xx}(\tau)}{C_{xx}(۰)} \qquad (۷-۱۲۸)$$

تخمین $C_{yy}(\tau)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\hat{C}_{yy}(\tau) = \frac{۱}{۲T} \int_{-T}^{T} \operatorname{sgn} X(t+\tau) \operatorname{sgn} X(t)\, dt \qquad (۷-۱۲۹)$$

محاسبهٔ این انتگرال امری ساده است چون انتگراند با $\pm$ ۱ برابر است بنابراین

$$\hat{C}_{yy}(\tau) = \left(\frac{T_\tau^+}{T} - ۱ \right)$$

که T_τ^+ زمان کل $X(t+\tau)\, X(t) > ۰$ است.

رابطه فوق به تخمین زیر از $C_{xx}(\tau)$ با یک ضریب می‌گردد.

$$\hat{C}_{xx}(\tau) = \hat{C}_{xx}(۰) \sin\left[\frac{\pi}{۲} \hat{C}_{yy}(\tau) \right]$$

قضیهٔ Bussgang

در رابطهٔ (۶۱–۵) نشان دادیم که کوواریانس متقابل فرآیندهای $X(t)$ و $Y(t) = \operatorname{sgn} X(t)$ با $C_{xx}(\tau)$ متناسب است.

$$C_{xy}(\tau) = K\, C_{xx}(\tau) \quad , \quad K = \sqrt{\frac{2}{\pi\, C_{xx}(0)}} \qquad (۷–۱۳۰)$$

بنابراین، به منظور تخمین $C_{xx}(\tau)$ کافی است که $C_{xy}(\tau)$ را تخمین بزنیم.

با استفاده از رابطهٔ (۷–۱۲۷) می‌توان نوشت

$$\hat{C}_{xx}(\tau) = \frac{1}{K}\, \hat{C}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2kT} \int_{-T}^{T} X(t+\tau)\, \operatorname{sgn} X(t)\, dt \qquad (۷–۱۳۱)$$

فرآیندهای ارگودیک در توزیع

هر پارامتر یک مدل مبتنی بر احتمالات را که بتوان به صورت متوسط تابعی از فرآیند SSS، $X(t)$ بیان کرد می‌توان توسط متوسط زمانی تخمین زد.

به ازاء مقدار معین x، توزیع $X(t)$

متوسط فرآیند $Y(t) = U[x - X(t)]$ است:

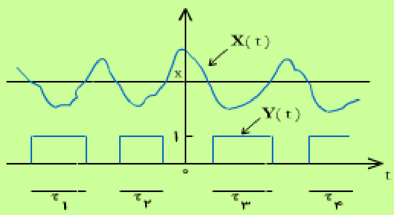
$$Y(t) = \begin{cases} 1 & , X(t) \le x \\ 0 & , X(t) > x \end{cases} \quad , \quad E\{Y(t)\} = P\{X(t) \le x\} = F(x)$$

بنابراین $F(x)$ را می‌توان با متوسط زمانی $Y(t)$ تخمین زد.

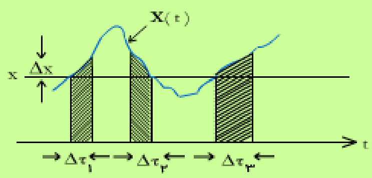
با قرار دادن در رابطهٔ (۹۹–۷) تخمین زیر به دست می‌آید.

$$F_T(x) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} Y(t)\, dt = \frac{\tau_1 + \dots + \tau_n}{2T} \qquad (۷–۱۳۲)$$

که در آن τ_i طول بازه های زمانی که در طول آن $X(t)$ از x کوچکتر است می‌باشد (شکل ۷–۷ الف).



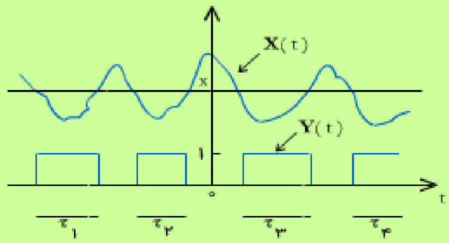
شکل ۷–۷ الف



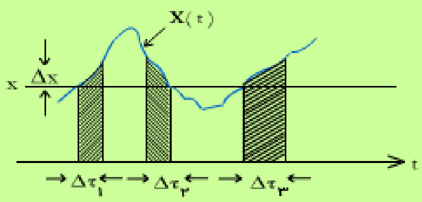
شکل ۷–۷ ب

به منظور تعیین واریانس $F_T(x)$ ، باید ابتدا اتوکوواریانس $Y(t)$ را به دست بیاوریم.

حاصل ضرب $Y(t+\tau)Y(t)$ هنگامی برابر یک است که $X(t) \le x$ و $X(t+\tau) \le x$ باشد، در غیر این صورت برابر صفر خواهد بود.



شکل ۷–۷ الف



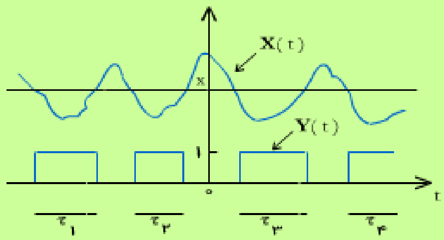
شکل ۷–۷ ب

بنابراین

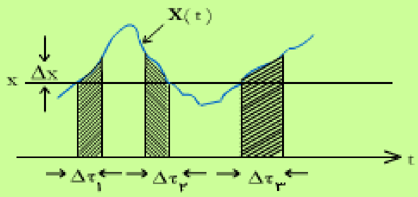
$$R_y(\tau) = P\{X(t+\tau) \le x \ , \ X(t) \le x\} = F(x, x; \tau)$$

که در آن $F(x, x; \tau)$ توزیع مرتبهٔ دو $X(t)$ است.

اگر در رابطهٔ (۷–۱۰۲) به جای $C(\tau)$ ، تابع اتوکوواریانس $F(x, x: \tau) - F^2(x)$ مربوط به $Y(t)$ قرار دهیم، واریانس $F_T(x)$ به دست می‌آید.



شکل ۷-۷ الف



شکل ۷-۷ ب

با استفاده از (۷-۱۰۵) می‌توان گفت که فرآیند $X(t)$
ارگودیک در توزیع است اگر و فقط اگر

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} F(x, x; \tau)\, d\tau \xrightarrow[T\to\infty]{} F^{2}(x) \qquad (۷\text{-}۱۳۳)$$

شرط کافی از رابطهٔ (۷-۱۰۸) قابل حصول است: فرآیند $X(t)$
ارگودیک در توزیع است اگر به ازاء $\tau \to \infty$ ، $F(x, x; \tau) \to F^{2}(x)$

این در واقع موردی است که در آن متغیرهای تصادفی $X(t)$ و $X(t+\tau)$
به ازاء τ بزرگ مستقل هستند.
به منظور تخمین چگالی $X(t)$ ، بازه های زمانی $\Delta\tau_i$ را که در طول آنها
$X(t)$ بین $x + \Delta x$ و x قرار دارد (شکل ۷-۷ ب)
تعیین می‌کنیم. با استناد به رابطهٔ (۷-۱۳۲) می‌توان گفت

$$f(x)\ \Delta x \simeq F(x+\Delta x) - F(x) \simeq \frac{1}{2T}\sum_{i} \Delta\tau_i$$

پس $f(x)\,\Delta x$ با درصد زمانی که یک نمونه تنها از $X(t)$
بین $x + \Delta x$ و x قرار دارد برابر است.
از این نتیجه می‌توان برای طراحی تخمین آنالوگ $f(x)$ استفاده کرد

مسائل فصل ۷

۷-۱ اگر

$$S_x(\omega) = \frac{\cos 2\omega + 1}{12\cos 2\omega - 70\cos \omega + 62}$$

باشد تابع $R_x[m]$ و فیلتر سفید کنندهٔ $X[n]$ را تعیین کنید.

۷-۲ اگر

$$S_x(\omega) = \frac{\omega^4 + 64}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$$

باشد فیلتر ابداع فرآیند $X(t)$ را به دست آورید.

۷-۳ اگر $l_s[n]$ پاسخ ضربه فیلترابداع $S[n]$ باشد، نشان دهید که

$$R_s[0] = \sum_{n=0}^{\infty} l_x^2[n]$$

۷-۴ $X(t)$ فرآیندی WSS بوده و

$$Y''(t) + 3Y'(t) + 2Y(t) = X(t)$$

نشان دهید که الف) به ازاء تمام مقادیر τ روابط زیر برقرار است

$$R''_{yx}(\tau) + 3R'_{yx}(\tau) + 2R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau)$$

$$R''_{yy}(\tau) + 3R'_{yy}(\tau) + 2R_{yy}(\tau) = R_{xy}(\tau)$$

ب) اگر $R_{xx}(\tau) = q\,\delta(\tau)$ باشد، آن گاه، به ازاء $\tau < 0$ ، $R_{yx}(\tau) = 0$ بوده و به ازاء $\tau > 0$ روابط زیر حاکم است

$$R''_{yx}(\tau) + 3R_{yx}(\tau) + 2R_{yx}(\tau) = 0\ ,\ R_{yx}(0) = 0,\ R'_{yx}(0^+) = q$$

$$R''_{yy}(\tau) + 3R'_{yy}(\tau) + 2R_{yy}(\tau) = 0\ ,\ R_{yy}(0) = \frac{q}{12}\ ,\ R'_{yy}(0) = 0$$

۷-۵ نشان دهید که اگر $S[n]$ فرآیندی AR , $V[n]$ نویز سفید متعامد بر $S[n]$ باشد، در آن صورت فرآیند $X[n] = S[n] + V[n]$ فرآیند ARMA است.

اگر $R_s[m] = ۲^{-|m|}$ ، $S_r(z) = ۵$ باشد $S_x(z)$ را بیابید.

۷-۶ نشان دهید که اگر $X(t)$ فرآیندی WSS بوده و

$$S = \frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} X(kT)$$

باشد آن گاه

$$E\{S^۲\} = \frac{۱}{۲\pi n^۲}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\frac{\sin^۲ n\omega T/۲}{\sin^۲\omega T/۲}\, d\omega$$

۷-۷ ثابت کنید که اگر $R_x(\tau) = e^{-c|\tau|}$ باشد، درآن صورت بسط K - L فرآیند $X(t)$ دربارۀ $(-a , a)$ مجموع زیر خواهد بود

$$\hat{X}(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} (\beta_n b_n \cos \omega_n t + \beta'_n b'_n \sin \omega'_n t)$$

که درآن

$$\tan a\omega_n = \frac{C}{\omega_n} , \cot a\omega'_n = \frac{-C}{\omega'_n} , \beta_n = (a + C\lambda_n)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\beta'_n = (a - C\lambda'_n)^{-\frac{۱}{۲}} , E\{b_n^۲\} = \lambda_n = \frac{۲C}{C^۲ + \omega_n^۲} ,$$

$$E\{b'^۲_n\} = \lambda'_n = \frac{۲C}{C^۲ + \omega'^۲_n}$$

۷-۸ نشان دهید که اگر $X(t)$ فرآیندی WSS بوده و

$$X_T(\omega) = \int_{-T/۲}^{T/۲} X(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

باشد آن گاه

$$E\{ \frac{\partial}{\partial T} | X_T(\omega) |^۲ \} = \int_{-T}^{T} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

۷-۹ تابع متوسط و واریانس انتگرال زیر را تحت شرایط

$$R_v(\tau) = ۲\delta(\tau) \;,\; E\{ V(t) \} = ۰$$

به دست آورید.

$$X(\omega) = \int_{-a}^{a} [\, ۵ \cos ۳t + V(t) \,]\, e^{-j\omega t} dt$$

۷-۱۰ نشان دهید که اگر

$$E\{ X_n X_k \} = \sigma_n^۲ \delta[n-k] \;,\; X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{-jn\omega T} \;, E\{ X_n \} = ۰$$

باشد در آن صورت $E\{ X(\omega) \} = ۰$ بوده و

$$E\{ X(u) X^*(v) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n^۲\, e^{-jn(u-v)T}$$

۷-۱۱ ثابت کنید که اگر فرآیند $X(\omega)$ نویز سفید با متوسط صفر و اتوکواریانس $Q(u)\,\delta(u-v)$ باشد، آن گاه تبدیل فوریه معکوس آن $X(t)$ فرآیندی WSS با طیف توان $Q(\omega)/۲\pi$ خواهد بود.

۷–۱۲ از انتگرال زیر به عنوان تخمین تبدیل فوریهٔ $F(\omega)$ مربوط به سیگنال $f(t)$ استفاده می‌کنیم

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^{T} [\, f(t) + \gamma(t)\,]\, e^{-j\omega t}\, dt$$

که در آن $\gamma(t)$ نویز اندازه گیری می‌باشد.

نشان دهید که اگر

$$E\{\gamma(t)\} = 0 \;\; , \;\; S_{\gamma\gamma}(\omega) = q$$

باشد آن گاه

$$E\{X_T(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(Y)\, \frac{\sin T(\omega - Y)}{\pi(\omega - Y)}\, dY \;\; , \;\; \operatorname{Var} X_T(\omega) = 2qT$$

۷–۱۳ تابع متوسط و واریانس متغیر تصادفی

$$\eta_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\, dt$$

را که در آن $X(t) = 10 + \gamma(t)$ است به ازاء $T = 5 \, , \, T = 100$ به دست آورید. فرض کنید که

$$R_{\gamma}(\tau) = 2\delta(\tau) \;\; , \;\; E\{\gamma(t)\} = 0$$

می‌باشد.

۷–۱۴ نشان دهید که اگر فرآیندی نرمال و ارگودیک در توزیع بر اساس رابطهٔ (۷–۱۳۳) باشد، آن گاه این فرآیند ارگودیک در متوسط است.

۷-۱۵ **نشان دهید که اگر** $X(t)$ **نرمال با** $R_x(\tau) = 0 \ , \ \eta_x = 0$ **به ازاء** $|\tau| > a$ **باشد، در آن صورت ارگودیک در هم بستگی نیز خواهد بود.**

۷-۱۶ **نشان دهید که فرآیند** $a\, e^{j(\omega t + \varphi)}$ **فرآیند ارگودیک در هم بستگی نیست.**

۷-۱۷ **ثابت کنید که**

$$R_{xy}(\lambda) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t+\lambda) Y(t)\, dt$$

اگر و فقط اگر

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) E\{ X(t+\lambda+\tau) Y(t+\tau) X(t+\lambda) Y(t) \} d\tau = R^2_{xy}(\lambda)$$

۷-۱۸ **فرآیند** $X(t)$ **فرآیندی ایستان دوری با تناوب** T **، متوسط** $\eta(t)$ **و هم بستگی** $R(t_1, t_2)$ **را در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر به ازاء** $|\tau| \to \infty$ **،** $R(t+\tau, t) \to \eta^2(t)$ **میل کند، آن گاه**

$$\lim_{C \to \infty} \frac{1}{2C} \int_{-C}^{C} X(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \eta(t) dt$$

{راهنمایی : فرآیند $\overline{X}(t) = X(t - \theta)$ **فرآیندی ارگودیک در متوسط است}**

۷-۱۹ **نشان دهید که اگر**

$$C(t+\tau, t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

و این همگرایی به طور یکنواخت برحسب t **صورت پذیرد، آن گاه** $X(t)$ **ارگودیک در متوسط خواهد بود.**

۷-۲۰ **فرآیندهای** $X(t)$ **و** $Y(t)$ **تواماً نرمال با متوسط صفر می‌باشند. ثابت کنید که الف) اگر**

$$W(t) = X(t+\lambda) Y(t)$$

باشد، آنگاه

$$C_{ww}(\tau) = C_{xy}(\lambda+\tau)\, C_{xy}(\lambda-\tau) + C_{xx}(\tau)\, C_{yy}(\tau)$$

ب) اگر به ازاء $\tau \to \infty$ **، توابع** $C_{xx}(\tau) \ , \ C_{yy}(\tau) \ , \ C_{xy}(\tau)$ **به صفر میل کند،آن گاه فرآیندهای** $X(t)$ **و** $Y(t)$ **فرآیندهای ارگودیک در واریانس متقابل می‌باشند.**