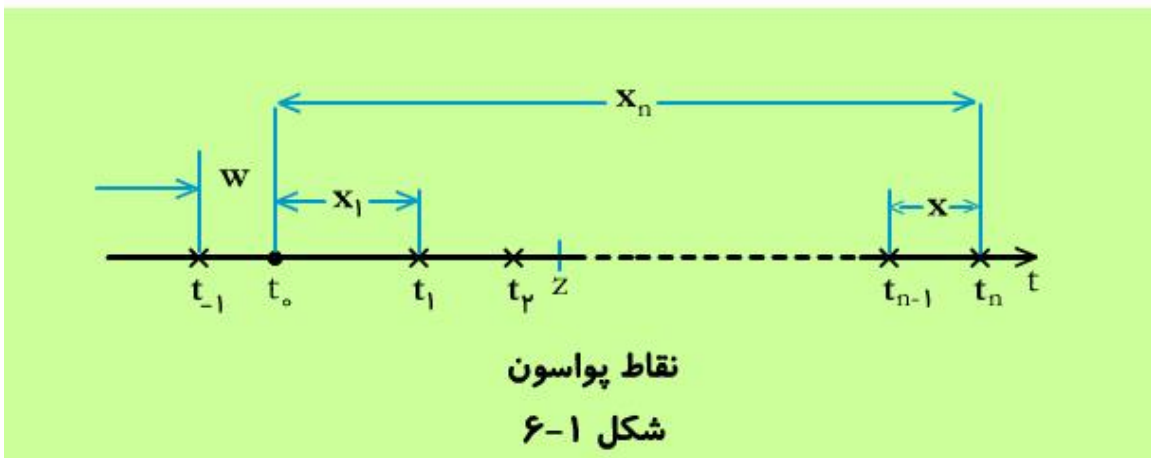


فصل (۶) انواع خاص فرآیندهای تصادفی و کاربرد آنها

۶-۱ فرآیند تصادفی پواسون و نویز ضربه ای

مجموعه ای از نقاط پواسون t_i و نقطه ثابت t_0 را در نظر گرفته و متغیر تصادفی $Z=(t_1 - t_0)$ را که اولین نقطه تصادفی در طرف راست t_0 است، تشکیل می دهیم (شکل ۶-۱)



حال نشان می دهیم که Z دارای توزیع نمایی است

$$f_z(z) = \lambda e^{-\lambda z}, \quad F_z(z) = 1 - e^{-\lambda z}, \quad z > 0 \quad (6-1)$$

به ازاء $z > 0$ ، تابع $F_z(z)$ با احتمال پیشآمد $\{Z \leq z\}$ برابر است. این پیشآمد هنگامی رخ می دهد که $t_1 < t_0 + z$ باشد یعنی حداقل یک نقطه تصادفی در بازه $(t_0, t_0 + z)$ وجود داشته باشد.

بنابراین

$$F_z(3) = P\{Z \leq 3\} = P\{n(t_0, t_0 + 3) > 0\} = 1 - P\{n(t_0, t_0 + 3) = 0\}$$

با توجه به اینکه احتمال عدم وجود هر گونه نقطه ای در بازه $(t_0, t_0 + 3)$ برابر $e^{-\lambda 3}$ (توزیع پواسون و $k=0$) است رابطه $(6-1)$ بدست می آید.

مشابه می توان نشان داد که اگر $W = (t_0 - t_{-1})$ یعنی فاصله t_0 از اولین نقطه t_{-1} واقع در طرف چپ t_0 باشد آن گاه

$$f_w(w) = \lambda e^{-\lambda w}, \quad F_w(w) = 1 - e^{-\lambda w}, \quad w > 0 \quad (6-2)$$

اکنون نشان می دهیم که فاصله $X_n = t_n - t_0$ از t_0 تا t_n نقطه تصادفی

n ام در طرف راست t_0 (شکل 1-6) دارای توزیع گاما است.

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \quad x > 0 \quad (6-3)$$

برای اثبات باید توجه کرد که پیش آمد $\{X_n \leq x\}$ هنگامی رخ می دهد که حداقل n نقطه در بازه $(t_0, t_0 + x)$ وجود داشته باشد، پس

$$F_n(x) = P\{X_n \leq x\} = 1 - P\{n(t_0, t_0 + x) < n\} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$$

با گرفتن مشتق از رابطه فوق، تابع توزیع $(6-2)$ به دست می آید.

همچنین می توان نشان داد که فاصله بین نقاط تصادفی مجاور

$$X = X_n - X_{n-1} = t_n - t_{n-1}$$

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (6-4)$$

برای اثبات باید گفت که چون X_n بر اساس رابطه (6-3) توزیع گاما دارد پس تابع گشتاور آن برابر است با

$$\Phi_n(S) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - S)^n} \quad (6-5)$$

از طرف دیگر متغیرهای تصادفی X و X_{n-1} از یکدیگر مستقل هستند و چون $X_n = X + X_{n-1}$ است پس اگر $\Phi_x(S)$ تابع گشتاور X باشد، آن گاه

$$\Phi_n(S) = \Phi_x(S) \Phi_{n-1}(S)$$

با استفاده از رابطه (6-5) می توان نتیجه گرفت که

$$\Phi_x(S) = \frac{\lambda}{(\lambda - S)}$$

و در نتیجه با گرفتن تبدیل لاپلاس عکس توزیع نمایی (6-4) حاصل می شود.

باید تاکید کرد که عبارت

"فاصله X بین دو نقطه مجاور یا متوالی یک فرآیند نقطه ای" مبهم است.

در شکل 6-1 ما X را به عنوان فاصله بین t_{n-1} و t_n

تعبیر کردیم که در آن t_n نقطه تصادفی n ام در طرف راست نقطه ثابت

معینی مانند t_0 است.

این تعبیر منجر به نتیجه ای شد که بر اساس آن چگالی X نمایی بوده

در رابطه ۴-۶ توصیف شده است.

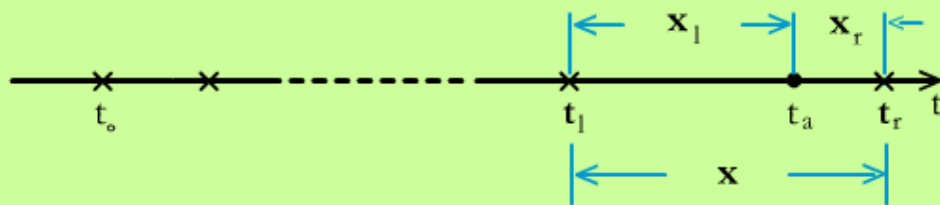
اگر X را به صورت فاصله بین نقاط متوالی در طرف چپ t_0 تفسیر کنیم همان چگالی به دست می‌آید.

به هر حال X به شکل زیر قابل تعبیر است:

نقطه ثابت t_a را فرض کرده و نقاط تصادفی t_l و t_r را که از طرف چپ و

راست t_a به آن نزدیکترین نقطه هستند

(شکل ۲-۶ الف) در نظر بگیرید



شکل ۲-۶ الف

می‌توان گفت که چگالی فاصله $X = t_r - t_l$ بین این دو نقطه برابر است با

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \quad (6-6)$$

در واقع متغیرهای تصادفی $X_l = t_a - t_l$ و $X_r = t_r - t_a$

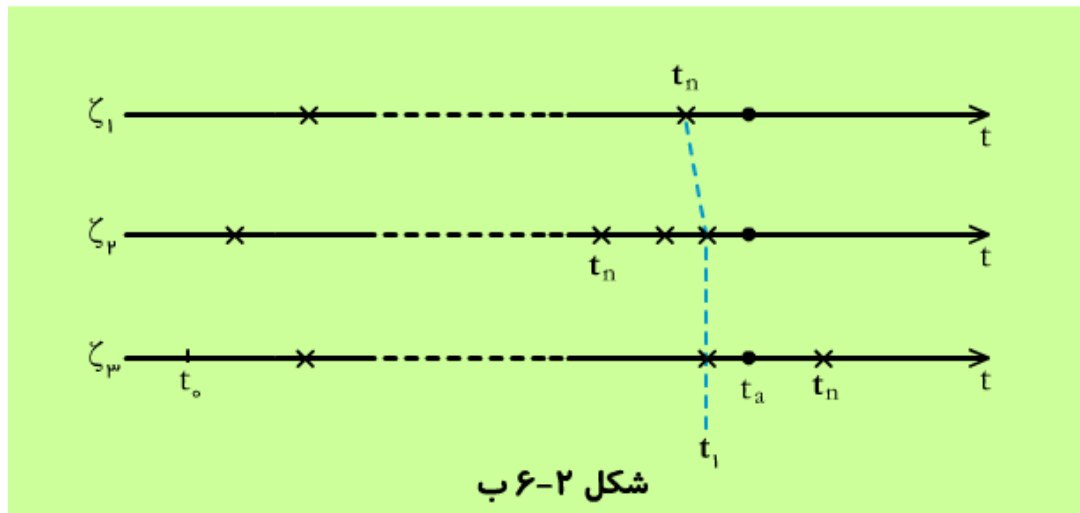
متغیرهای تصادفی مستقل با چگالی نمایی مطابق رابطه (۱-۶) هستند.

علاوه بر این $X = X_r + X_l$ بوده و از آنجا که کانولوشن دو نمایی چگالی

(۶-۶) خواهد شد.

پس می توان گفت چگالی X توسط رابطه (۶-۶) تعیین می شود.
 بنابراین، اگر چه X دوباره "فاصله بین دو نقطه متوالی" است
 چگالی آن نمایی نیست این تناقض ماحصل ابهام در توصیف و مشخص
 نمودن نقاط تصادفی است.

برای مثال، تصور کنید که ما نقاط t_i را با ترتیب آنها یعنی i توصیف می کنیم
 به طوری که شمارش از نقطه اختیاری ثابتی مانند t_0 شروع می شود.
 ملاحظه می کنیم که در یک تحقق به خصوص از فرآیند نقطه ای، نقطه
 t_1 که به صورت بالا تعریف می شود با t_n برابر است.
 در تحقق دیگر فرآیند، متغیرهای تصادفی t_1 می تواند با نقاط دیگری
 در این توصیف برابر باشد (شکل ۶-۲ ب)



همان استدلال نشان می دهد که نقطه t_r در تمام تحقق ها بر نقطه
 مرتب شده t_{n+1} منطبق نمی شود.

بنابراین نباید انتظار داشته باشیم که متغیرهای تصادفی $X = t_r - t_1$
 همان چگالی متغیر تصادفی $t_{n+1} - t_n$ را داشته باشد.

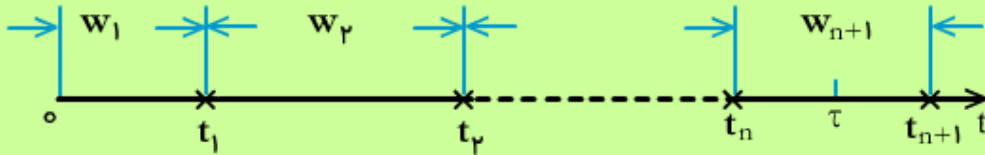
اکنون به تعریف سازنده ای می پردازیم. دنباله W_n متشکل از متغیرهای تصادفی i.i.d. (مستقل با توزیع یکسان) مثبت با چگالی زیر را در نظر می گیریم.

$$f(w) = \lambda e^{-\lambda w} \quad w > 0 \quad (6-7)$$

مطابق شکل (6-3) الف، مجموعه ای از نقاط t_n را تشکیل می دهیم به طوری که $t = 0$ مبدأ دلخواه بوده و

$$t_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n \quad (6-8)$$

می باشد.



شکل 6-3 الف

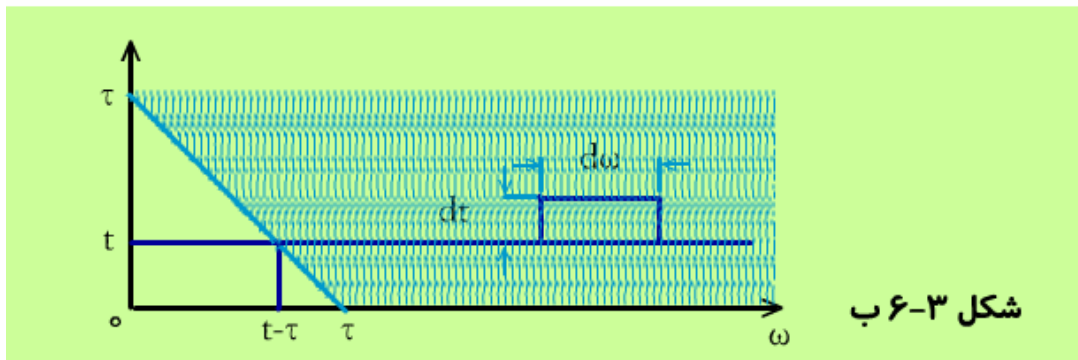
حال نشان می دهیم که نقاط تشکیل شده به روش فوق دارای توزیع پواسون با پارامتر λ هستند.

با توجه به استقلال متغیرهای تصادفی W_n ، می توان نتیجه گرفت که متغیرهای تصادفی t_n و W_{n+1} مستقل بوده و چگالی $f_n(t)$ مربوط به t_n توسط رابطه (6-3) توصیف شده

$$\{f_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}\}$$

و چگالی توأم t_n و W_{n+1} با حاصلضرب $f_n(t)f(w)$ برابر است.
 اگر $t_n < \tau$ و $t_{n+1} = t_n + W_{n+1} > \tau$ باشد در آن صورت دقیقاً n نقطه در بازه $(0, \tau)$ وجود خواهد داشت.

همان طور که در شکل ۳-۶ ب



شکل ۳-۶ ب

ملاحظه می‌کنیم احتمال این پیش‌آمد برابر است با

$$\int_0^\tau \int_{\tau-t}^\infty \lambda e^{-\lambda w} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} dw dt$$

$$= \int_0^\tau e^{-\lambda(\tau-t)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!}$$

بنابراین نقاط t_n توزیع پواسون دارند.

فرآیندهای پواسون و توزیع هندسی

فرض کنید

$$X(t) \sim P(\lambda t), \quad Y(t) \sim P(\mu t)$$

هر دو فرآیند پواسون مستقل بوده، و n تعداد رخداد $X(t)$ بین هر دو

رخداد متوالی $Y(t)$ است.

بنابراین اگر Z بیانگر بازه تصادفی بین دو رخداد متوالی $Y(t)$ باشد

در این صورت داریم

$$P\{n=k / Z=t\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

و در نتیجه

$$P\{n=k\} = \int_0^{\infty} P\{n=k / Z=t\} f_z(t) dt$$

ولی با توجه به رابطه (۴-۶) متغیر Z توزیع نمایی با پارامتر μ دارد یعنی

$$f_z(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

و در نتیجه می توان نوشت

$$\begin{aligned} P\{n=k\} &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \mu \lambda^k \int_0^{\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)t} dt = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \int_0^{\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx \\ &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k, \quad k=0,1,2,\dots \end{aligned} \quad (6-9)$$

بنابراین تعداد رخداد (شمارش) فرآیند پواسون بین هر دو رخداد متوالی فرآیند پواسون مستقل دیگر دارای توزیع هندسی است می‌توان نشان داد که شمارش‌های مربوط به زمان‌های ورود مختلف، متغیرهای تصادفی هندسی مستقل هستند.

برای مثال، اگر $X(t)$ و $Y(t)$ فرآیندهای پواسون ورود به و خروج از مطب دکتر باشند، آن‌گاه با توجه به رابطه (۶-۹) تعداد ورودها بین هر دو خروج متوالی دارای توزیع هندسی است.

مشابهاً تعداد خروج‌ها بین هر دو ورود نیز متغیر تصادفی هندسی است.

فرآیندهای پواسون و فرآیندهای ارلانگ

فرض کنید که هر نتیجه k ام فرآیند پواسون $X(t)$ به طور سیستماتیک مرتبط با تولید فرآیند جدیدی مانند $Y(t)$ است.

در آن صورت

$$P\{Y(t)=n\}=P\{nk \leq X(t) \leq (n+1)k-1\}$$

$$= \sum_{r=nk}^{(n+1)k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!}, \quad n \geq 0 \quad (6-10)$$

با به کار بردن روابط (۶-۸) و (۶-۳) و تعریف $Y(t)$ ، زمان ورود بین هر دو رخداد متوالی $Y(t)$ یک متغیر تصادفی گاما است.

اگر $\lambda = k\mu$ باشد آن‌گاه زمان ورود بیانگر متغیر تصادفی ارلانگ [Erlang] k - بوده و $Y(t)$ فرآیند ارلانگ k - است.

جالب توجه است که انتخاب تصادفی فرآیند پواسون به فرآیند پواسون دیگری منجر می‌شود در حالی که انتخاب سیستماتیک از فرآیند تصادفی مانند مورد فوق فرآیند ارلانگ k - را به وجود می‌آورد.

تعریف مجدد نقاط پواسون

نقاط پواسون مدل‌های واقعی برای گروه عظیمی از فرآیندهای نقطه‌ای مانند شمارش و تعداد فوتون‌ها، ساطع شدن الکترون، مکالمات تلفنی، ارتباطات داده‌ها، مراجعه به دکتر، ورود به یک پارک، می‌باشد. دلیل آن عبارت است از این که در کاربردهای فوق و سایر موارد، خصوصیات نقاط را می‌توان از برخی شرایط عمومی معین که به توزیع‌های پواسون منجر می‌شوند، به دست آورد.

همان گونه که در سطور زیرین نشان می‌دهیم، این شرایط را می‌توان به صورت مختلف بیان کرد.

۱- اگر N نقطه تصادفی را در بازه‌ای به طول T قرار دهیم به طوری که $N \gg 1$ باشد در آن صورت فرآیند نقطه‌ای حاصله تقریباً فرآیندی پواسون با پارامتر N/T خواهد بود.

این نکته هنگامی از نظر حد دقیق است که T و N به بی نهایت میل کنند.
 ۲- اگر فواصل W_n بین دو نقطه متوالی t_n و t_{n-1} یک فرآیند نقطه ای مستقل از یکدیگر با توزیع نمایی باشند (مانند ۶-۷) آن گاه این فرآیند پواسون است.

این موضوع را می توان به شکل معادل دیگری بیان کرد.
 اگر فاصله W از یک نقطه دلخواه t_0 تا نقطه دیگری از یک فرآیند نقطه ای، متغیر تصادفی باشد که چگالی آن به انتخاب t_0 وابسته نیست، در آن صورت فرآیند پواسون خواهد بود.
 منطق این شکل معادل در واقع این فرض است که منجر به نتیجه زیر می شود

$$f(w/w \geq t_0) = f(w - t_0) \quad (6-11)$$

و تنها تابعی که رابطه (۶-۱۱) را اقلان می کند تابع نمایی است.
 در نظریه صف، خاصیت فوق را خاصیت مارکوف یا بدون حافظه می نامند.

۳- اگر تعداد نقاط $n(t, t+dt)$ در بازه $(t, t+dt)$ به نحوی باشد که
 الف) $P\{n(t, t+dt) = 1\}$ از مرتبه dt باشد
 ب) $P\{n(t, t+dt) > 1\}$ از مرتبه بزرگتر از dt باشد
 ج) این احتمالات به حالت فرآیند نقطه ای در خارج از بازه $(t, t+dt)$ وابسته نباشد در آن صورت فرآیند پواسون است.

۴- بالاخره تصور کنید که

الف) $P\{n(a, b) = k\}$ فقط به k و به طول بازه (a, b) بستگی داشته باشد
 ب) اگر بازه های (a_i, b_i) غیر هم پوشان باشند، در آن صورت متغیرهای تصادفی $n(a_i, b_i)$ مستقل هستند

$$P\{n(a, b) = \infty\} = 0 \quad (ج)$$

این شرایط مجدداً به این نتیجه منجر می شود که احتمال $P_k(\tau)$ یعنی احتمال داشتن k نقطه در هر بازه به طول τ برابر است با

$$P_k(\tau) = e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^k / k!$$

از اثبات صرفنظر می‌شود.

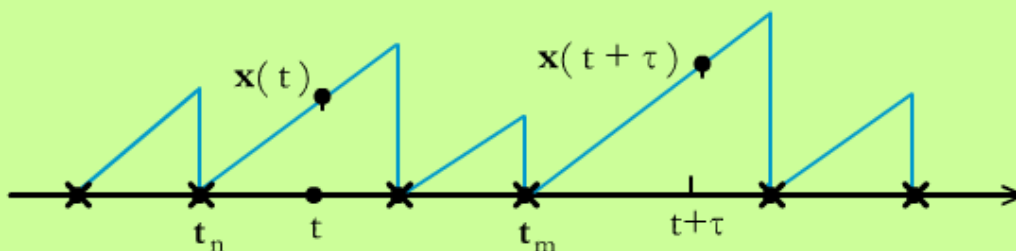
میان‌یابی [Interpolation] خطی

فرآیند

$$X(t) = t - t_n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1} \quad (6-12)$$

در شکل ۶-۴ از قطعه خط‌های مستقیم با شیب واحد بین دو نقطه تصادفی متوالی t_n و t_{n+1} تشکیل یافته است.

به ازاء یک t معین، $X(t)$ با فاصله $W = t - t_n$ از t تا نزدیکترین نقطه t_n در طرف چپ t برابر است. بنابراین توزیع مرتبه اول $X(t)$ مانند رابطه (۶-۲) نمایشی است. با توجه به این نتیجه می‌توان گفت



شکل ۶-۴

$$E\{X(t)\} = \frac{1}{\lambda}, \quad E\{X^2(t)\} = \frac{2}{\lambda^2}$$

اکنون می‌خواهیم تابع کواریانس فرآیند میان یابی $X(t)$ را تعیین کنیم. بدین منظور نقاط تصادفی طرف چپ نقاط t و $t + \tau$ را به ترتیب t_n و t_m نامیده و در ابتدا فرض می‌کنیم که $t_m = t_n$ است. در این حالت

$$X(t + \tau) = t + \tau - t_n \quad \text{و} \quad X(t) = t - t_n$$

می‌باشد. بنابراین با توجه به رابطه (۱۱-۶) داریم

$$\begin{aligned} C(\tau) &= E\{(t + \tau - t_n)(t - t_n)\} = E\{(t - t_n)^2\} + \tau E\{t - t_n\} \\ &= \frac{2}{\lambda^2} + \frac{\tau}{\lambda} \end{aligned}$$

حال فرض کنید که $t_m \neq t_n$ باشد. در این مورد

$$C(\tau) = E\{(t + \tau - t_m)(t - t_n)\} = E\{t + \tau - t_m\} E\{t - t_n\} = \frac{1}{\lambda^2}$$

بدیهی است هنگامی $t_m = t_n$ است که نقاط تصادفی در بازه $(t, t + \tau)$

وجود نداشته باشد بنابراین $P\{t_m = t_n\} = e^{-\lambda\tau}$ خواهد بود.

مشابهاً اگر حداقل یک نقطه تصادفی در بازه $(t, t + \tau)$ باشد در آن صورت

$t_m \neq t_n$ خواهد بود. پس $P\{t_m \neq t_n\} = 1 - e^{-\lambda\tau}$ می‌باشد.

از آنجا که

$$R(\tau) = E\{X(t + \tau)X(t) / t_m = t_n\} + E\{X(t + \tau)X(t) / t_m \neq t_n\}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$R(\tau) = \left(\frac{\nu}{\lambda^2} + \frac{\tau}{\lambda} \right) e^{-\lambda\tau} + \frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda\tau}), \quad \tau > 0$$

اگر $\frac{1}{\lambda^2}$ را از رابطه فوق کم کنیم تابع کواریانس به دست می‌آید.

$$C(\tau) = \frac{1}{\lambda^2} (1 + \lambda|\tau|) e^{-\lambda|\tau|}$$

فصل ششم جلسه دوم

نویز ضربه‌ای

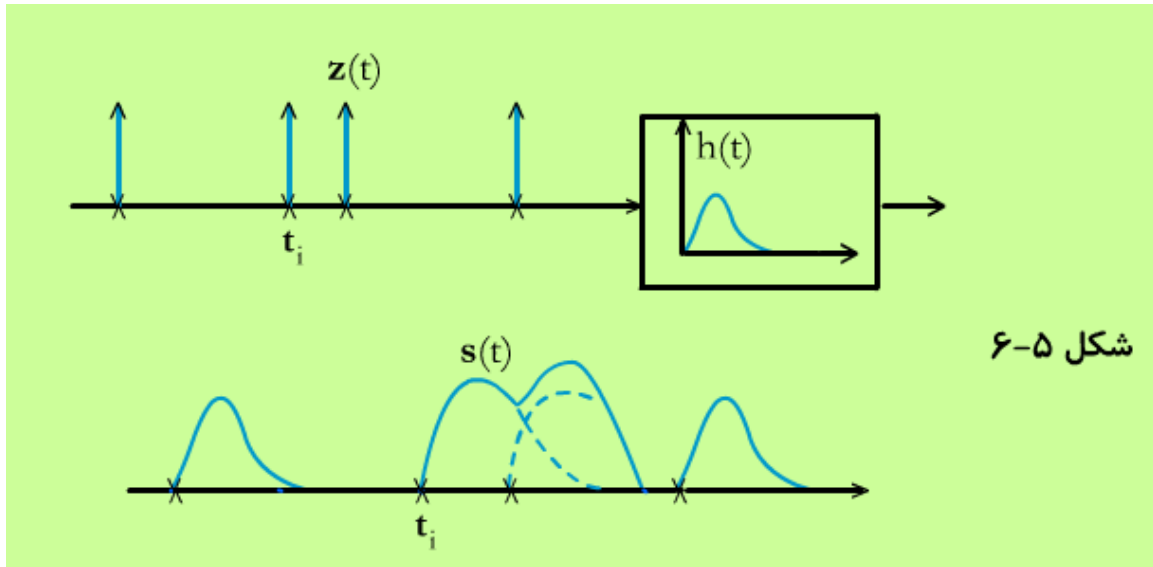
مجموعه‌ای از نقاط پواسون t_i با چگالی متوسط λ و تابع حقیقی $h(t)$ داده شده است، مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$S(t) = \sum_i h(t - t_i)$$

این مجموع فرآیندی SSS بوده و به نویز ضربه‌ای [Shot Noise] معروف است.

در اینجا خواص مرتبه‌دو آن را بررسی می‌کنیم.

با توجه به تعریف $S(t)$ ، می‌توان آن را به عنوان خروجی سیستم خطی



شکل ۵-۶

(شکل ۵-۶) با پاسخ ضربه $h(t)$ و ورودی ضربه های پواسون در نظر گرفت

$$Z(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$$

توصیف فوق با تولید نویز ضربه ای در مسائل فیزیکی هم‌آهنگ است. فرآیند $S(t)$ خروجی سیستم دینامیکی است که توسط دنباله ای از ضربه‌ها مانند (ساطع شدن ذرات) که در لحظات تصادفی t_i رخ می‌دهند، تحریک و فعال می‌شود.

همان طور که می‌دانیم $\eta_z = \lambda$ است پس

$$E\{S(t)\} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \lambda H(\circ)$$

علاوه بر این، از آنجا که

$$S_{zz}(\omega) = 2\pi \lambda^2 \delta(\omega) + \lambda$$

است با استفاده از رابطه

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) |H(\omega)|^2$$

می توان نتیجه گرفت که

$$S_{ss}(\omega) = 2\pi \lambda^2 H^2(0) \delta(\omega) + \lambda |H(\omega)|^2$$

معکوس رابطه فوق تابع خودبستگی و کواریانس را تعیین می کند

$$R_{ss}(\tau) = \lambda^2 H^2(0) + \lambda \rho(\tau) \quad , \quad C_{ss}(\tau) = \lambda \rho(\tau)$$

بنا به قضیه کمپل، Campbell تابع متوسط η_s و واریانس σ_s^2

فرآیند نوینز ضربه ای $S(t)$ عبارت است از

$$\eta_s = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad , \quad \sigma_s^2 = \lambda \rho(0) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt \quad (6-13)$$

مثال ۱-۶

اگر

$$h(t) = e^{-\alpha t} U(t) \quad , \quad H(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

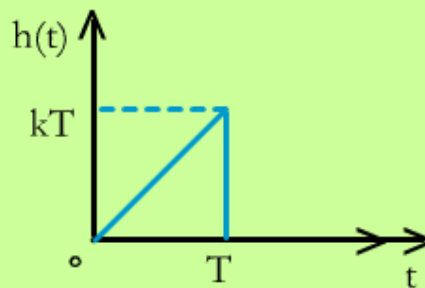
باشد در آن صورت

$$\eta_s = \frac{\lambda}{\alpha} \quad , \quad \sigma_s^2 = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

$$S_{ss}(\omega) = \frac{2\pi\lambda^2}{\alpha^2} \delta(\omega) + \frac{\lambda}{\alpha^2 + \omega^2} \quad , \quad C_{ss}(\tau) = \frac{\lambda}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

مثال ۲-۶ (انتقال الکرون)

فرض کنید که $h(t)$ به صورت مثلث مطابق شکل ۶-۶ الف می باشد.



شکل ۶-۶ الف

از آنجا که

$$\int_0^T kt dt = \frac{kT^2}{2} \quad \text{و} \quad \int_0^T k^2 T^2 dt = \frac{k^2 T^3}{3}$$

با استناد به رابطه (۱۳-۶) می توان گفت

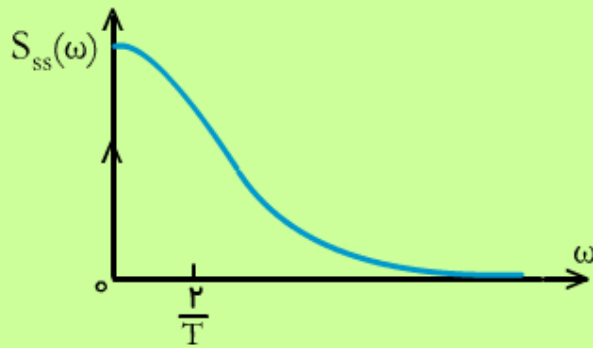
$$\eta_s = \frac{\lambda k T^2}{2}, \quad \sigma_s^2 = \frac{\lambda k^2 T^3}{3}$$

در این مورد

$$H(\omega) = \int_0^T kT e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{2k \sin \omega T/2}{j\omega} - e^{-j\omega T} \frac{kT}{j\omega}$$

و چگالی طیفی توان نویز ضربه ای برابر است با (شکل ۶-۶ ب)

$$S_{ss}(\omega) = 2\pi \eta_s^2 \delta(\omega) + \frac{\lambda k^2}{\omega^2} (2 - 2\cos \omega T + \omega^2 T^2 - 2\omega T \sin \omega T)$$



(شکل ۶-۶ ب)

فرآیندهای پواسون و نوبز ضربه‌ای تعمیم یافته

مجموعه‌ای از نقاط پواسون t_i با چگالی متوسط λ را در نظر گرفته و

فرآیند زیر را تشکیل می‌دهیم

$$X(t) = \sum_i C_i U(t-t_i) = \sum_{i=1}^{n(t)} C_i \quad (6-14)$$

که C_i دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی i.i.d. و مستقل از نقاط t_i

و با متوسط η_c و واریانس σ_c^2 می‌باشد.

پس $X(t)$ یک تابع پله‌ای خواهد بود که جهش‌ها در نقاط t_i برابر C_i است.

فرآیند $n(t)$ تعداد نقاط پواسون در بازه $(0, t)$ است، بنابراین

$$E\{n(t)\} = \lambda t, \quad E\{n^2(t)\} = \lambda^2 + \lambda t$$

خواهد بود

با توجه به استقلال t_i و C_i می توان نوشت.

$$E\{X(t)\} = \eta_c E\{n(t)\} = \eta_c \lambda t$$

$$E\{X^r(t)\} = \eta_c^r E\{n^r(t)\} + \sigma_c^r E\{n(t)\} = \eta_c^r (\lambda t + \lambda^r t^r) + \sigma_c^r \lambda t$$

و تابع کواریانس $X(t)$ برابر است با

$$C_{xx}(t_1, t_2) = (\eta_c^r + \sigma_c^r) \lambda \min(t_1, t_2)$$

اکنون دنباله ای از ضربه ها را تشکیل می دهیم

$$Z(t) = X'(t) = \sum_i C_i \delta(t - t_i)$$

به سهولت می توان متوسط و کواریانس نویز ضربه ای را تعیین کرد.

$$E\{Z(t)\} = \frac{d}{dt} E\{X(t)\} = \eta_c \lambda$$

$$C_{zz}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 C_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} (\eta_c^r + \sigma_c^r) \lambda \delta(\tau)$$

که در آن $\tau = t_2 - t_1$ است.

با کانالو نمودن $Z(t)$ با تابع $h(t)$ ، نویز ضربه ای تعمیم یافته به دست می آید

$$S(t) = \sum_i C_i h(t - t_i) = Z(t) * h(t)$$

و در نتیجه داریم

$$E\{S(t)\} = E\{Z(t)\} * h(t) = \eta_c \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$$

$$C_{ss}(\tau) = C_{zz}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = (\eta_c^2 + \sigma_c^2) \lambda \rho(\tau)$$

$$\text{Var}\{S(t)\} = C_{ss}(0) = (\eta_c^2 + \sigma_c^2) \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt$$

روابط و نتایج فوق در واقع تعمیم قضیه کمپبل به فرآیند نویز ضربه ای با ضرایب تصادفی است.

فرآیندهای پواسون مرکب

در فرآیند پواسون معمولی در هر لحظه ورود فقط یک پیشآمد رخ می‌دهد. اکنون تعداد تصادفی از پیشآمدهای C_i را در نظر بگیرید که به طور همزمان به صورت یک خوشه یا دسته در لحظه t_i مانند مورد رابطه (۱۴-۶) رخ می‌دهد به نحوی که تعداد کل خوشه‌ها در لحظه t بیانگر فرآیند پواسون معمولی $n(t)$ است. هر خوشه دارای تعداد تصادفی از رخدادها است که از سایر خوشه‌ها مستقل می‌باشد، فرض کنید C_i بیانگر تعداد رخدادها در خوشه i ام بوده و $X(t)$ تعداد کل رخدادها در بازه $(0, t)$ باشد. در آن صورت $X(t)$ فرآیند پواسون مرکب را توصیف می‌کند. برای مثال، C_i می‌تواند بیانگر تعداد ماشین‌های درگیر در حادثه تصادف i ام (تعداد خانه‌های دچار حریق در حادثه حریق i ام)

در بازه ای از زمان باشد و اگر تعداد تصادفات (حریق‌ها) در آن بازه به صورت فرآیند پواسون مدل شود، آن گاه تعداد ادعاهای خسارت در آن بازه دارای توزیع پواسون مرکب خواهد بود. فرض کنید که احتمال

$$p_k = P\{C_i = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6-15)$$

بیانگر تابع جرم احتمال رخدادها در هر خوشه‌ای بوده و

$$P(z) = E\{Z^{c_i}\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \quad (6-16)$$

تابع مولد گشتاور آن است.

به ازاء هر t ، تابع مولد گشتاور فرآیند پواسون مرکب عبارت است از:

$$\begin{aligned} \Phi_x(Z) &= E\{Z^{X(t)}\} = E\{E(Z^{X(t)} / n(t) = k)\} \\ &= E\{E(Z^{\sum_{i=1}^k c_i} / n(t) = k)\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [E(Z^{c_i})]^k P\{n(t) = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [P(Z)]^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t [1 - P(z)]} \quad (6-17) \end{aligned}$$

از این رابطه می‌توان استفاده کرده و احتمال n رخداد در بازه $(0, t)$

را به دست آورد. بدین منظور فرض کنید که

$$P^k(Z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(k)} Z^n \quad (6-18)$$

که در آن $\{p_n^{(k)}\}$ بیانگر k بار کانولوشن دنباله $\{p_n\}$ با خود می‌باشد. با جایگزین کردن رابطه (۶-۱۸) در عبارت اول رابطه (۶-۱۷) به تساوی

جالبی می‌رسیم

$$P\{X(t)=n\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} p_n^{(k)} \quad (6-19)$$

معادلات ۶-۱۶ و ۶-۱۷ را نیز می‌توان به کار برده و نشان داد که هر توزیع پواسون مرکب در واقع ترکیب خطی (با ضرایب صحیح) فرآیندهای پواسون مستقل است.

در حقیقت با جایگزین کردن (۶-۱۶) در (۶-۱۷) داریم

$$\Phi_x(Z) = e^{-\lambda_1 t(1-z)} e^{-\lambda_2 t(1-z^2)} \dots e^{-\lambda_k t(1-z^k)} \dots \quad (6-20)$$

که در آن $\lambda_k = \lambda p_k$ بوده و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$X(t) = m_1(t) + 2m_2(t) + \dots + km_k(t) \quad (6-21)$$

که در آن $m_k(t)$ فرآیندهای پواسون مستقل با پارامتر

$$k = 1, 2, \dots \text{ به } \lambda p_k$$

می‌باشد. به صورت کلی‌تر، می‌توان با استفاده از این ملاحظات نشان داد که هر ترکیب خطی فرآیندهای پواسون مستقل یک فرآیند پواسون مرکب است.

بنابراین

$$Y(t) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(t) \quad (6-22)$$

یک فرآیند پواسون مرکب است که در آن a_k ثابت‌های دلخواه و $X_k(t)$

فرآیندهای پواسون مستقل با پارامتر $\lambda_k t$ هستند، چون

$$\begin{aligned}\Phi_y(Z) &= E\{Z^{Y(t)}\} = \prod_{k=1}^n E\{Z^{a_k X_k(t)}\} \\ &= \prod_{k=1}^n e^{-\lambda_k t (1-z^{a_k})} = e^{-\lambda t (1-P_o(z))} \quad (6-23)\end{aligned}$$

که

$$\lambda \triangleq \sum_{k=1}^n \lambda_k \quad P_o(Z) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda} Z^{a_k} \quad (6-24)$$

از مقایسه (6-23) و (6-24) با (6-16) و (6-17) می‌توان نتیجه گرفت که

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{Z(t)} C_i \quad (6-25)$$

این نتیجه مانند مورد رابطه (6-14) بوده و در آن $Z(t) \sim P\{\lambda t\}$ و

$$P\{C_i = a_k\} = \frac{\lambda_k}{\lambda}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (6-26)$$

می‌باشد

۲-۶ مدولاسیون

دو فرآیند حقیقی توأمأ WSS $a(t)$, $b(t)$ با متوسط صفر و نیز ثابت ω_0 را در نظر بگیرید. فرآیند زیر را تشکیل می‌دهیم

$$X(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t = r(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (6-27)$$

که در آن

$$r(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} \quad , \quad \tan \varphi(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

این فرآیند را مدوله شده با مدولاسیون دامنه $r(t)$ و مدولاسیون فاز $\varphi(t)$ نامند. نشان می‌دهیم که $X(t)$ فرآیندی WSS است اگر و فقط اگر فرآیندهای $a(t)$, $b(t)$ به نحوی باشند که

$$R_{aa}(\tau) = R_{bb}(\tau) \quad , \quad R_{ab}(\tau) = -R_{ba}(\tau) \quad (6-28)$$

برای اثبات باید گفت بدیهی است

$$E\{X(t)\} = E\{a(t)\} \cos \omega_0 t - E\{b(t)\} \sin \omega_0 t = 0$$

علاوه براین

$$X(t+\tau) X(t) = [a(t+\tau) \cos \omega_0(t+\tau) - b(t+\tau) \sin \omega_0(t+\tau)] \\ \times [a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t]$$

با انجام عملیات ضرب، امید ریاضی و استفاده از تساویهای مثلثاتی مناسب،

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
 2 E\{X(t+\tau)X(t)\} &= [R_{aa}(\tau) + R_{bb}(\tau)] \cos \omega_0 \tau \\
 &+ [R_{ab}(\tau) - R_{ba}(\tau)] \sin \omega_0 \tau \\
 &+ [R_{aa}(\tau) - R_{bb}(\tau)] \cos \omega_0 (2t+\tau) \\
 &- [R_{ab}(\tau) + R_{ba}(\tau)] \sin \omega_0 (2t+\tau) \quad (6-29)
 \end{aligned}$$

اگر رابطه (6-28) برقرار باشد در آن صورت رابطه فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$R_{xx}(\tau) = R_{aa}(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{ab}(\tau) \sin \omega_0 \tau \quad (6-30)$$

بالعکس اگر $X(t)$ فرآیند WSS باشد آن گاه خطوط دوم و سوم رابطه (6-29) باید مستقل از t باشد و این امر هنگامی امکان دارد که رابطه (6-27) صادق باشد.

فرآیند "دوگان" [Dual] را معرفی می‌کنیم

$$Y(t) = b(t) \cos \omega_0 t + a(t) \sin \omega_0 t$$

این فرآیند نیز WSS است و

$$\begin{aligned}
 R_{yy}(\tau) &= R_{xx}(\tau) \quad , \quad R_{xy}(\tau) = -R_{yx}(\tau) \\
 R_{xy}(\tau) &= R_{ab}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{aa}(\tau) \sin \omega_0 \tau
 \end{aligned}$$

نتیجه فوق از رابطه (6-29) به دست می‌آید مشروط بر آن که یک یا دو فاکتور حاصلضرب $X(t+\tau)X(t)$ را به $Y(t+\tau)$ یا $Y(t)$ تغییر داد.

فرآیند های زیر را معرفی می کنیم

$$W(t) = a(t) + jb(t) = r(t) e^{j\varphi(t)}$$

$$Z(t) = X(t) + jY(t) = W(t) e^{j\omega_0 t}$$

بنابراین

$$X(t) = \text{Re}[Z(t)] = \text{Re}[W(t) e^{j\omega_0 t}]$$

و

$$a(t) + jb(t) = W(t) = Z(t) e^{-j\omega_0 t}$$

و در نتیجه می توان نوشت

$$a(t) = X(t) \cos \omega_0 t + Y(t) \sin \omega_0 t$$

$$b(t) = Y(t) \cos \omega_0 t - X(t) \sin \omega_0 t$$

تابع هم بستگی و طیف توان فرآیند مختلط $W(t)$ عبارت است از

$$R_{ww}(\tau) = E\{[a(t+\tau) + jb(t+\tau)][a(t) - jb(t)]\}$$

با بسط رابطه فوق و استفاده از (۶-۲۸) داریم

$$R_{ww}(\tau) = 2R_{aa}(\tau) - 2jR_{ab}(\tau)$$

مشابهاً می توان نوشت

$$R_{zz}(\tau) = 2R_{xx}(\tau) - 2jR_{xy}(\tau)$$

علاوه بر آن، قابل توجه است که

$$R_{zz}(\tau) = e^{j\omega_0\tau} R_{ww}(\tau)$$

با استناد به رابطه فوق می توان نتیجه گرفت که

$$S_{ww}(\omega) = 2S_{aa}(\omega) - 2jS_{ab}(\omega)$$

$$S_{zz}(\omega) = 2S_{xx}(\omega) - 2jS_{xy}(\omega)$$

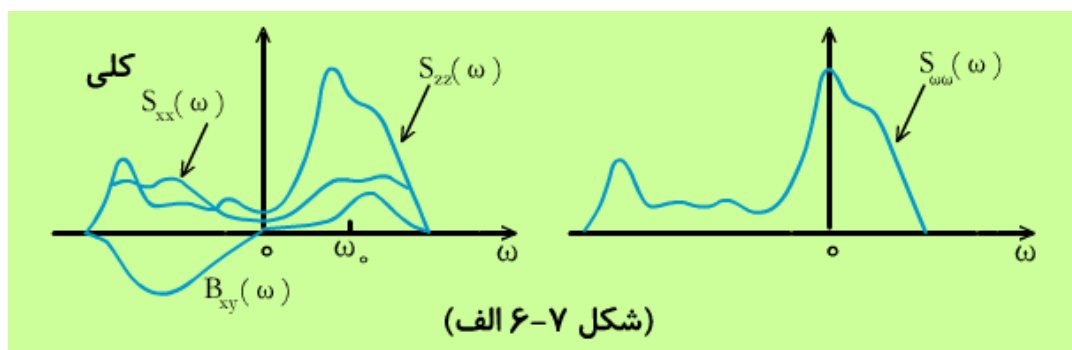
$$S_{zz}(\omega) = S_{ww}(\omega - \omega_0)$$

توابع $S_{zz}(\omega)$ و $S_{xx}(\omega)$ توابع حقیقی و مثبت هستند. علاوه بر این

$$R_{xy}(-\tau) = -R_{yx}(-\tau) = -R_{xy}(\tau)$$

رابطه فوق منجر به این نتیجه می شود که تابع $B_{xy}(\omega) = -jS_{xy}(\omega)$

حقیقی بوده و مطابق (شکل ۶-۷ الف)



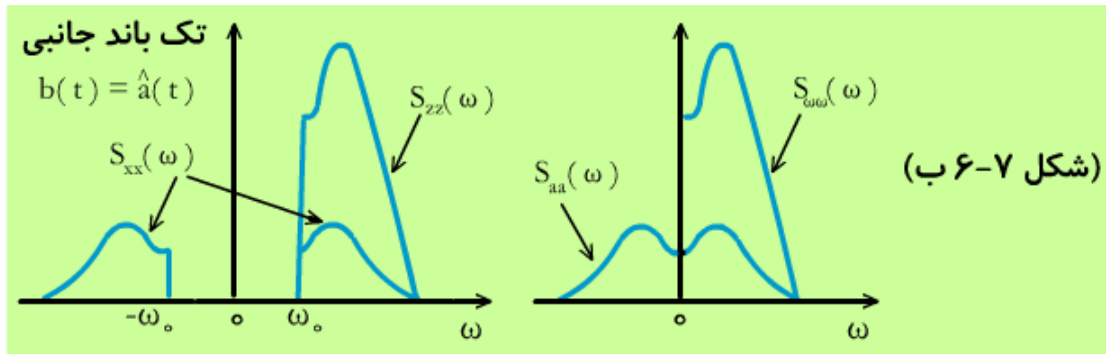
$$|B_{xy}(\omega)| \leq S_{xx}(\omega) \quad , \quad B_{xy}(-\omega) = -B_{xy}(\omega)$$

و از آنجا که $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$ است به آسانی و با استناد به روابط فوق

می توان نتیجه گرفت

$$4S_{xx}(\omega) = S_{zz}(\omega) + S_{zz}(-\omega)$$

$$4jS_{xy}(\omega) = S_{zz}(-\omega) - S_{zz}(\omega)$$



اگر $b(t) = \hat{a}(t)$ تبدیل هیلبرت $a(t)$ باشد آن گاه شرط (۶-۲۸)

اقناع شده و می توان نوشت

$$S_{ww}(\omega) = 4 S_{aa}(\omega) U(\omega)$$

(شکل ۶-۷ ب) چون

$$S_{\hat{a}\hat{a}}(\omega) = j S_{aa}(\omega) \text{sgn}(\omega)$$

طیف های حاصله در شکل ۶-۷ ب نشان داده شده

به خصوص توجه کنید که به ازاء $|\omega| < \omega_0$ ، $S_{xx}(\omega) = 0$ است.

در رابطه (۶-۲۷) فرض کردیم که فرکانس حامل ω_0 و فرآیندهای

$a(t)$ و $b(t)$ داده شده اند.

اکنون مسأله معکوس را در نظر بگیرید.

فرآیند $X(t)$ ، WSS با متوسط صفر داده شده و می خواهیم ثابت ω_0

و دو فرآیند $a(t)$ و $b(t)$ را به نحوی پیدا کنیم که $X(t)$ را بتوان به شکل

رابطه (۶-۲۷) نوشت.

بدین منظور کافی است که ثابت ω_0 و فرآیند دوگان $Y(t)$ را به دست آوریم.

این موضوع نشان می دهد که توصیف $X(t)$ به شکل (۶-۲۷) یکتا نیست

چون نه فقط ω_0 اختیاری است بلکه فرآیند $Y(t)$ را می توان

به طور دلخواه انتخاب کرد مشروط بر آنکه در شرایط زیر صدق کند

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \quad , \quad R_{xy}(\tau) = -R_{yx}(\tau)$$

سوالی که در این جا مطرح است عبارت است از اینکه آیا در میان تمام

توصیف های ممکن $X(t)$ ، یک توصیف بهینه وجود دارد؟

جواب البته به معیار بهینه بودن بستگی دارد.

همان طور که به زودی توضیح داده خواهد شد، اگر $Y(t)$ تبدیل هیلبرت

$\hat{X}(t)$ مربوط به فرآیند $X(t)$ باشد، در آن صورت رابطه (۶-۲۷) از نظر

حداقل نمودن نرخ متوسط تغییرات پوش $X(t)$ بهینه است.

تبدیل های هیلبرت

همان گونه که می دانیم

$$R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = R_{xx}(\tau) \quad , \quad R_{x\hat{x}}(\tau) = -R_{\hat{x}x}(\tau)$$

بنابراین می توان با استفاده از $\hat{X}(t)$ فرآیندهای زیر را تشکیل داد

$$Z(t) = X(t) + j\hat{X}(t) = W(t) e^{j\omega_0 t}$$

$$W(t) = i(t) + jq(t) = Z(t) e^{-j\omega_0 t}$$

پس می توان گفت

$$X(t) = \text{Re}[Z(t)] = \text{Re}[W(t) e^{j\omega_0 t}]$$

$$= \text{Re}\{[i(t) + jq(t)][\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t]\}$$

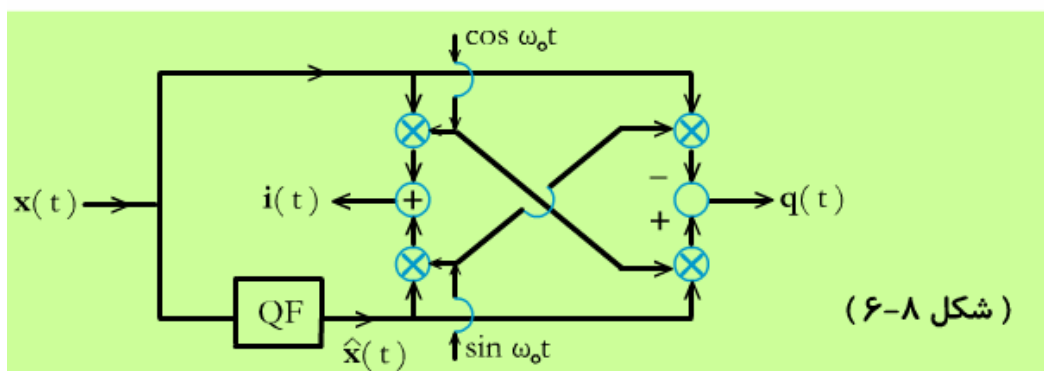
بنابراین

$$X(t) = i(t) \cos \omega_0 t - q(t) \sin \omega_0 t \quad (6-31)$$

رابطه فوق به توصیف رایس [Rice] معروف است.

فرآیند $i(t)$ را مولفه هم فاز و فرآیند $q(t)$ را مولفه تربیعی $X(t)$ نامند.

تحقق آنها در شکل ۶-۸ نشان داده شده است.



این فرآیندها نه فقط به $X(t)$ بلکه به انتخاب فرکانس حامل ω_0

نیز بستگی دارند.

هم چنین با توجه به روابط طیف توان که قبلاً مطرح گردید داریم

$$S_{zz}(\omega) = 4 S_{xx}(\omega) U(\omega) \quad (6-32)$$

فرآیندهای میانگذر

فرآیند $X(t)$ را هنگامی میان گذر می‌نامیم که طیف فرکانسی آن $S_{xx}(\omega)$

در خارج بازه (ω_p, ω_s) صفر باشد.

آن را باند باریک یا شبه تک رنگ [Quasi monochromatic] می‌نامند

مشروط بر آنکه پهنای باند آن $\omega_s - \omega_p$ در مقایسه با فرکانس مرکزی

کوچک باشد.

آن را هنگامی تک رنگ می‌نامند که $S_{xx}(\omega)$ یک تابع ایمپالسی باشد.

فرآیند $a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$ تک رنگ است.

توصیف یا نمایش بر اساس روابط (۶-۲۷) یا (۶-۳۱) برای هر $X(t)$

دلخواه قابل استفاده است.

به هر حال اگر $X(t)$ فرآیندی میان گذر باشد روابط فوق بسیار سودمند خواهند بود.

در این مورد، پوش مختلط $W(t)$ و فرآیندهای $q(t)$ ، $i(t)$ پائین گذر

(LP) هستند چون

$$S_{ww}(\omega) = S_{zz}(\omega + \omega_0)$$

$$S_{ii}(\omega) = S_{qq}(\omega) = \frac{1}{4} S_{ww}(\omega) + S_{ww}(-\omega) \quad (6-33)$$

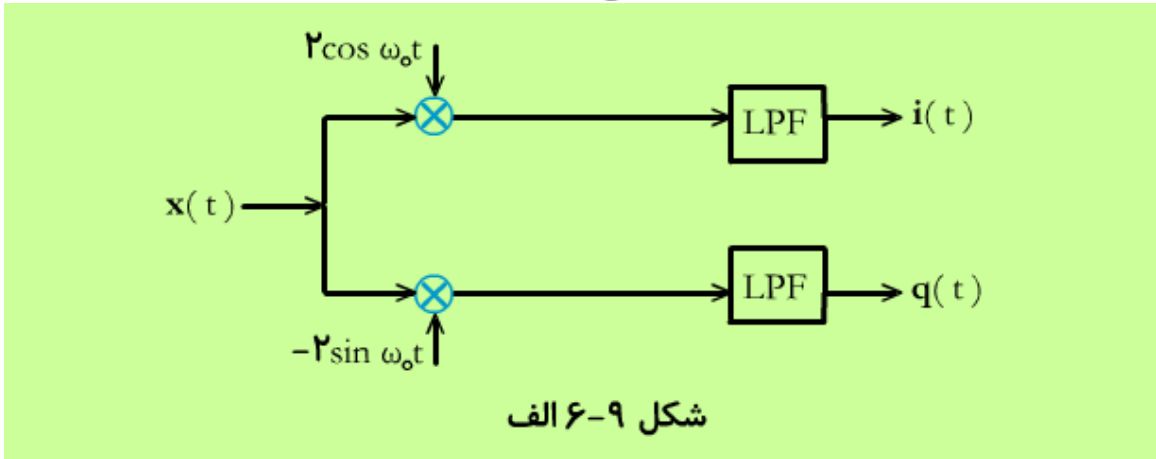
اکنون نشان می‌دهیم که اگر فرآیند $X(t)$ میانگذر بوده و $\omega_1 + \omega_c \leq 2\omega_0$

باشد در آن صورت مؤلفه هم فاز $i(t)$ و مؤلفه تربیعی $q(t)$

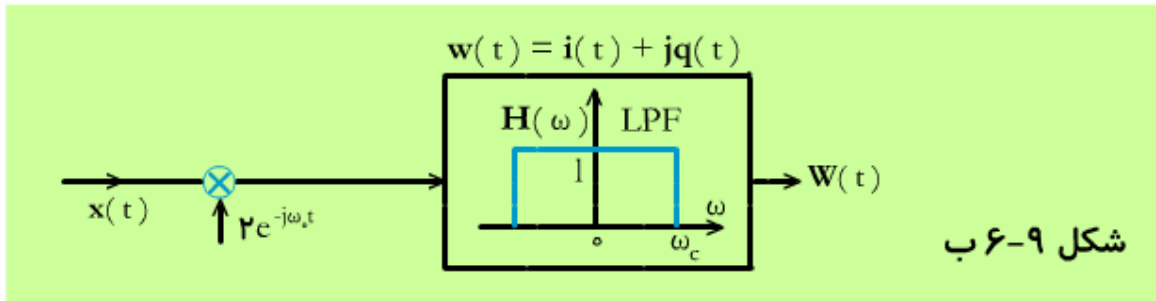
را می‌توان به صورت پاسخ‌های سیستم شکل ۹-۶ الف به دست آورد
 به طوری که در این سیستم فیلترهای پایین‌گذر (LP)
 ایده‌آل با فرکانس قطع ω_c بوده و

$$\omega_2 - \omega_0 < \omega_c, \quad \omega_1 - \omega_0 > -\omega_c$$

می‌باشد.



برای اثبات کافی است نشان دهیم (خاصیت خطی بودن) پاسخ سیستم
 شکل ۹-۶ ب



برابر $W(t)$ می‌باشد. واضح است که

$$2 X(t) = Z(t) + Z^*(t), \quad W^*(t) = Z^*(t) e^{j\omega_0 t}$$

بنابراین

$$2 X(t) e^{-j\omega_0 t} = W(t) + W^*(t) e^{-j2\omega_0 t}$$

طیف های فرآیندهای $W(t)$ و $e^{j2\omega_0 t} W^*(t)$ به ترتیب برابر
 $S_{ww}(\omega)$ و $S_{ww}(-\omega-2\omega_0)$ می باشد.

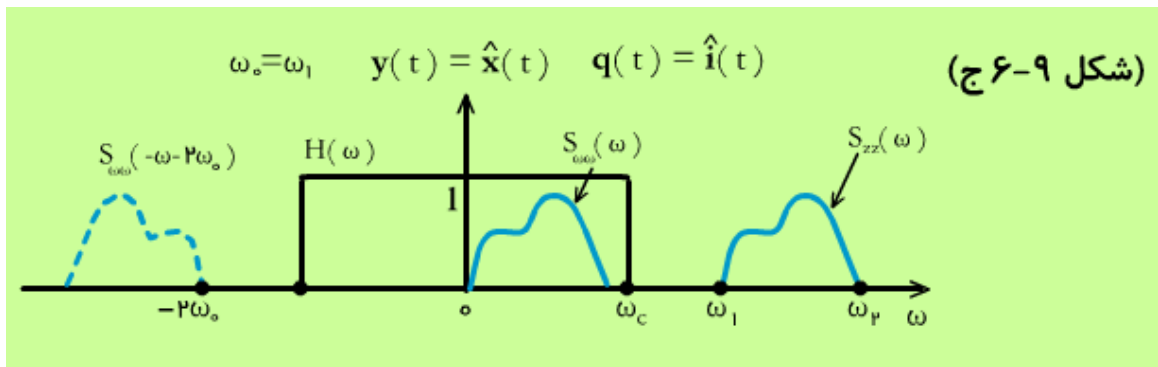
تحت شرایط گفته شده، طیف اول در باند $H(\omega)$ فیلتر پایین گذر
 LP بوده و طیف دوم در خارج باند است.

بنابراین پاسخ فیلتر برابر $W(t)$ است.

بالاخره، باید توجه کرد که اگر $\omega_0 \leq \omega_1$ باشد آن گاه $S_{ww}(\omega)$
 به ازاء $\omega < 0$ برابر صفر خواهد بود.

در این حالت $q(t)$ تبدیل هیلبرت $i(t)$ می باشد.

از آنجا که $\omega_1 \leq 2\omega_0$ است، این امر هنگامی امکان پذیر است که
 $\omega_1 \leq 3\omega_0$ باشد.



پوش بهینه

فرض کنید فرآیند اختیاری $X(t)$ در دست است و می‌خواهیم ثابت ω_0 و فرآیند $Y(t)$ را به نحوی تعیین کنیم که در توصیف (۶-۲۷) حاصله، پوش مختلط $W(t)$ مربوط به $X(t)$ از نظر مفهوم حداقل سازی $E\{|W'(t)|^2\}$ هموار باشد.

همان طور که می‌دانیم طیف توان $W'(t)$ برابر است با

$$\omega^2 S_{ww}(\omega) = \omega^2 S_{zz}(\omega + \omega_0)$$

بنابراین، مسأله حداقل نمودن انتگرال زیر است البته مشروط به این محدودیت که $S_{xx}(\omega)$ مشخص و معین می‌باشد.

$$M = 2\pi E\{|W'(t)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 S_{zz}(\omega) d\omega \quad (6-34)$$

توصیف رایس

توصیف رایس که رابطه (۶-۳۱) آن را بیان می‌کند بهینه بوده و ω_0 فرکانس حامل بهینه در واقع مرکز ثقل $\bar{\omega}_0$ مربوط به $S_{xx}(\omega)U(\omega)$ می‌باشد. به منظور اثبات، ابتدا فرض کنید که $S_{xx}(\omega)$ مشخص شده است. در این حالت M فقط به ω_0 وابسته است.

با گرفتن مشتق از طرف راست رابطه (۶-۳۴) نسبت به ω_0 ، نتیجه می‌گیریم که M هنگامی حداقل است که ω_0 با مرکز ثقل $S_{zz}(\omega)$ یعنی

$$\bar{\omega}_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega S_{zz}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{zz}(\omega) d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega B_{xy}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega} \quad (6-35)$$

برابر باشد.

تساوی دوم در رابطه فوق با استفاده از روابط مندرج در توصیف مختلط (مدولاسیون) نوشته شده است.

با قرار دادن رابطه (۶-۳۵) در رابطه (۶-۳۴) داریم

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega^2 - \bar{\omega}_0^2) S_{zz}(\omega) d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\omega^2 - \bar{\omega}_0^2) S_{xx}(\omega) d\omega \quad (6-36)$$

اکنون می‌خواهیم $S_{zz}(\omega)$ را به نحوی انتخاب کنیم که M حداقل شود. از آنجا که $S_{xx}(\omega)$ داده شده است، M هنگامی حداقل است که $\bar{\omega}_0$ حداکثر باشد.

همان طور که از رابطه (۶-۳۵) می‌توان دریافت، این امر هنگامی امکان پذیر است که

$$|B_{xy}(\omega)| = S_{xx}(\omega)$$

گردد چون

$$|B_{xy}(\omega)| \leq S_{xx}(\omega)$$

می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$-jS_{xy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega)$$

و

$$S_{zz}(\omega) = 4 S_{xy}(\omega) U(\omega)$$

فرکانس لحظه‌ای

فاز $\varphi(t)$ در رابطه (۶-۲۷) را در نظر بگیرید. فرآیند

$$\omega_i(t) = \omega_o + \varphi'(t) \quad (۶-۳۷)$$

را فرکانس لحظه‌ای $X(t)$ می‌نامند. از آنجا که

$$Z = r e^{j(\omega_o t + \varphi)} = X + jY$$

است، داریم

$$Z'Z^* = r r' + jr^2\omega_i = (X' + jY')(X - jY)$$

رابطه مذکور به $E\{rr'\} = 0$ و نتیجه زیر منجر می‌شود

$$E\{r^2\omega_i\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega S_{zz}(\omega) d\omega \quad (۶-۳۸)$$

چون طیف توان متقابل Z و Z' برابر $j\omega S_{zz}(\omega)$ است.

فرکانس لحظه‌ای فرآیند $X(t)$ یک فرآیند تعریف شده به طرز یکتا نمی‌باشد

چون فرآیند دوگان $Y(t)$ یکتا نیست.

در توصیف رایس $Y = \hat{X}$ بوده و بنابراین

$$\omega_i = \frac{X \hat{X}' - X' \hat{X}}{r^2}, \quad r^2 = X^2 + \hat{X}^2 \quad (۶-۳۹)$$

در این مورد (روابط ۶-۳۲ و ۶-۳۵ را ببینید) فرکانس حامل بهینه

$\bar{\omega}_o$ با متوسط وزن داده شده ω_i برابر است

$$\bar{\omega}_o = \frac{E\{r^2\omega_i\}}{E\{r^2\}}$$

فرآیند

$$X(t) = \cos[\omega_0 t + \lambda\varphi(t) + \varphi_0], \quad \varphi(t) = \int_0^t C(\alpha) d\alpha \quad (6-40)$$

مدولاسیون فرکانس (FM) با فرکانس لحظه‌ای $\omega_0 + \lambda C(t)$ و شاخص مدولاسیون λ می‌باشد. فرآیندهای مختلط متناظر برابرند با

$$W(t) = e^{j\lambda\varphi(t)}, \quad Z(t) = W(t) e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} \quad (6-41)$$

در سطور زیرین خواص طیفی آنها را بررسی می‌کنیم

قضیه

اگر فرآیند $C(t)$ فرآیند SSS بوده و متغیر تصادفی φ مستقل از $C(t)$ و به نحوی باشد که

$$E\{e^{j\varphi_0}\} = E\{e^{j\varphi_0}\} = 0 \quad (6-42)$$

در آن صورت $X(t)$ فرآیندی WSS با متوسط صفر است. علاوه بر آن

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2} \text{Re } R_{zz}(\tau) \\ R_{zz}(\tau) &= R_{ww}(\tau) e^{j\omega_0 \tau} \\ R_{ww}(\tau) &= E\{W(\tau)\} \end{aligned} \quad (6-43)$$

برای اثبات حکم قضیه باید گفت که با توجه به رابطه (6-42) می‌توان نتیجه گرفت

$$E\{X(t)\} = 0$$

$$E\{Z(t)\} = E\{e^{j[\omega_0 t + \lambda\varphi(t)]}\} E\{e^{j\varphi_0}\} = 0$$

و علاوه بر آن

$$E\{Z(t+\tau)Z(t)\} = E\{e^{j[\omega_0(t+\tau) + \lambda\varphi(t+\tau) + \lambda\varphi(t)]}\} E\{e^{j2\varphi_0}\} = 0$$

$$E\{Z(t+\tau)Z^*(t)\} = e^{j\omega_0\tau} E\left\{\exp\left[j\lambda \int_t^{t+\tau} C(\alpha) d\alpha\right]\right\} = e^{j\omega_0\tau} E\{W(\tau)\}$$

تساوی آخر در واقع ماحصل ایستادن بودن فرآیند $C(t)$ است.

با توجه به اینکه $X(t) = Z(t) + Z^*(t)$ از روابط فوق نتیجه می‌گیریم

که

$$E\{X(t+\tau)X(t)\} = R_{zz}(\tau) + R_{zz}(-\tau)$$

و رابطه (۶-۴۳) به دست می آید چون $R_{zz}^*(-\tau) = R_{zz}^*(\tau)$ می باشد بنا به تعریف، فرآیند $X(t)$ را هنگامی مدوله شده فاز می نامیم که خصوصیات آماری $\varphi(t)$ معلوم و شناخته شده باشد.

در این حالت، تابع خودبستگی آن را به آسانی می توان به دست آورد چون

$$E\{W(t)\} = E\{e^{j\lambda\varphi(t)}\} = \Phi_{\varphi}(\lambda, t) \quad (6-44)$$

که در آن $\Phi_{\varphi}(\lambda, t)$ تابع مشخصه $\varphi(t)$ است.

اگر خصوصیات آماری $C(t)$ معلوم و شناخته شده باشد، فرآیند $X(t)$ فرآیند مدوله شده فرکانسی نامیده می شود.

به منظور تعیین $\Phi_{\varphi}(\lambda, t)$ ما باید خصوصیات آماری انتگرال $C(t)$ را داشته باشیم. به هر حال، در موارد کلی، این کار ساده ای نیست. مورد عادی استثناء است چون $\Phi_{\varphi}(\lambda, t)$ را می توان بر حسب متوسط و واریانس $\varphi(t)$ بیان کرد و چنانچه می دانیم (رابطه ۱۱۹-۵ را ببینید)

$$E\{\varphi(t)\} = \int_0^t E\{C(\alpha)\} d\alpha = \eta_c t$$

$$E\{\varphi^2(t)\} = 2 \int_0^t R_c(\alpha)(t-\alpha) d\alpha \quad (6-45)$$

برای تعیین طیف توان $S_{xx}(\omega)$ فرآیند $X(t)$ باید تابع $\Phi_{\varphi}(\lambda, t)$ و تبدیل فوریه آن را به دست آوریم. به طور کلی این امر مشکلی است. به هر حال، همانگونه که قضیه زیر نشان می دهد، اگر λ بزرگ باشد، آن گاه $S_{xx}(\omega)$ را می توان مستقیماً بر حسب چگالی احتمال $C(t)$ یعنی $f_c(c)$ بیان کرد.

اگر فرآیند $C(t)$ پیوسته و چگالی آن $f_c(c)$ کراندار باشد، در آن صورت به ازاء λ بزرگ می‌توان نشان داد که

$$S_{xx}(\omega) \simeq \frac{\pi}{2\lambda} \left[f_c\left(\frac{\omega-\omega_0}{\lambda}\right) + f_c\left(\frac{-\omega-\omega_0}{\lambda}\right) \right] \quad (6-46)$$

برای اثبات باید گفت که اگر τ_0 به اندازه کافی کوچک باشد، آن گاه $C(t) \simeq C(0)$ بوده و

$$\varphi(t) = \int_0^t C(\alpha) d\alpha \simeq C(0)t, \quad |t| < \tau_0 \quad (6-47)$$

با استفاده از رابطه (6-44) داریم

$$E\{W(\tau)\} \simeq E\{e^{j\lambda\tau C(0)}\} = \Phi_c(\lambda\tau), \quad |\tau| < \tau_0 \quad (6-48)$$

که در آن

$$\Phi_c(\mu) = E\{e^{j\mu C(t)}\}$$

تابع مشخصه $C(t)$ است. با توجه به رابطه فوق و رابطه (6-43) می‌توان گفت

$$R_{zz}(\tau) \simeq \Phi_c(\lambda\tau) e^{j\omega_0\tau}, \quad |\tau| < \tau_0 \quad (6-49)$$

اگر λ به اندازه کافی بزرگ باشد، آن گاه به ازاء

$$|\tau| > \tau_0, \quad \Phi_c(\lambda\tau) \simeq 0$$

می‌شود چون به ازاء $0 \rightarrow \Phi_c(\mu) \rightarrow 0$ ، $\mu \rightarrow \infty$ میل می‌کند.

بنابراین رابطه (6-49) تقریب رضایت بخشی به ازاء هر τ در ناحیه ای که

$\Phi_c(\lambda\tau)$ مقادیر قابل توجهی را اختیار می‌کند، می‌باشد

با تبدیل دو طرف رابطه (۶-۴۹) و به کار بردن فرمول معکوس داریم

$$f_c(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_c(\mu) e^{-j\mu c} d\mu$$

و در نتیجه

$$S_{zz}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_c(\lambda\tau) e^{j\omega_0\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2\pi}{\lambda} f_c\left(\frac{\omega - \omega_0}{\lambda}\right)$$

و با استفاده از رابطه زیر که در توصیف مختلط فرآیندها مطرح گردید

$$4 S_{xx}(\omega) = S_{zz}(\omega) + S_{zz}(-\omega)$$

حکم قضیه یعنی رابطه (۶-۴۶) اثبات می‌شود.

فرآیندهای نرمال

فرض کنید که $C(t)$ فرآیند نرمال با متوسط صفر باشد.

در این حالت $\varphi(t)$ نیز نرمال با متوسط صفر خواهد بود.

بنابراین [رابطه (۶-۴۵) را ببینید]

$$\begin{aligned} \Phi_\varphi(\lambda, t) &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_\varphi^2(\tau)\right\} \\ \sigma_\varphi^2(\tau) &= 2 \int_0^\tau R_c(\alpha)(\tau - \alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (6-50)$$

به طور کلی، تبدیل فوریه $\Phi_\varphi(\lambda, t)$ فقط به صورت عددی به دست می‌آید.

به هر حال، همانگونه که نشان خواهیم داد فرمول‌هایی را می‌توان به کار برد

مشروط بر آنکه λ بزرگ یا کوچک باشد.

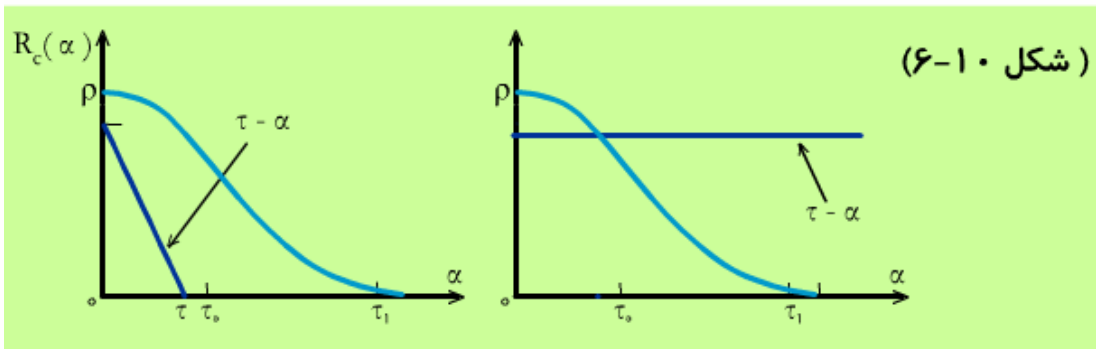
در اینجا زمان هم بستگی τ_c مربوط به $C(t)$ را تعریف می‌کنیم

$$\tau_c = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} R_c(\alpha) d\alpha, \quad \rho = R_c(0) \quad (6-51)$$

و دو ثابت τ_0 و τ_1 را به نحوی انتخاب می‌کنیم که

$$R_c(\tau) \approx \begin{cases} 0, & |\tau| > \tau_0 \\ \rho, & |\tau| < \tau_0 \end{cases}$$

با قرار دادن در رابطه (6-50) داریم (شکل 10-6)



$$\sigma_{\varphi}^2(\tau) \approx \begin{cases} \rho^2 \tau^2, & |\tau| < \tau_0 \\ 2\rho\tau\tau_c, & \tau > \tau_1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\rho\lambda^2\tau^2/2} \\ e^{-\rho\lambda^2\tau\tau_c} \end{array} \right\} \approx R_{ww}(\tau) \quad (6-52)$$

بر اساس خواص مجانبی تبدیل‌های فوریه می‌توان گفت که رفتار $R_{ww}(\tau)$

به ازاء τ کوچک (بزرگ) در واقع رفتار $S_{ww}(\omega)$ را به ازاء W

بزرگ (کوچک) تعیین می‌نماید. از آنجا که

$$\begin{aligned} e^{-\rho\lambda^2\tau^2/2} &\longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} e^{-\omega^2/2\rho\lambda^2} \\ e^{-\rho\lambda^2\tau_c|\tau|} &\longleftrightarrow \frac{2\rho\tau_c\lambda^2}{\omega^2 + \rho^2\tau_c^2\lambda^4} \end{aligned} \quad (6-53)$$

نتیجه می‌گیریم که $S_{ww}(\omega)$ در مجاورت مبدا لورنزی [Lorentzian]

بوده و با $\omega \rightarrow \infty$ به طور مجانبی نرمال می‌باشد.

همان گونه که نشان خواهیم داد، این موارد حدی $S_{ww}(\omega)$ را به ازاء λ بزرگ یا کوچک به قدر کافی توصیف می کند.

FM باند وسیع

اگر λ به نحوی باشد که

$$\rho \lambda_0^2 \tau_0^2 \gg 1$$

آنگاه به ازاء $R_{ww}(\tau) \approx 0$ ، $|\tau| > \tau_0$ است.

این نتیجه نشان می دهد که می توان تقریب فوقانی در رابطه (۶-۵۲) را به ازاء هر مقدار قابل ملاحظه τ بکار برد. طیف حاصله برابر است با

$$S_{ww}(\omega) \approx \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} e^{-\omega^2/2\rho\lambda^2} = \frac{2\pi}{\lambda} f_c\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) \quad (6-54)$$

که با قضیه [Woodward] هماهنگ است.

تساوی آخر در (۶-۵۴) با توجه به نرمال بودن $C(t)$ با واریانس

$$E\{C^2(t)\} = \rho$$

به دست آمده است.

اگر λ به نحوی باشد که

$$\rho \lambda^2 \tau_1 \tau_c \ll 1$$

گردد آنگاه

$$|\tau| < \tau_1 \quad , \quad R_{ww}(\tau) \simeq 1$$

است.

این نتیجه نشان می‌دهد که می‌توان تقریب تحتانی در رابطه (۶-۵۲)

را به ازاء هر مقدار قابل ملاحظه τ به کار برد. بنابراین

$$S_{ww}(\omega) \simeq \frac{2\rho\tau_c\lambda^2}{\omega^2 + \rho^2\tau_c^2\lambda^4} \quad (6-55)$$

فصل ششم جلسه ششم

۳-۶ فرآیندهای ایستادن دوری

اگر خصوصیات آماری فرآیند $X(t)$ نسبت به جابه‌جائی مبداء زمان به اندازه مضارب صحیحی از T تغییر ناپذیر باشد آنگاه فرآیند را ایستادن دوری [Cyclostationary] به مفهوم اکید SSCS با متناوب T نامند. به عبارت دیگر فرآیند $X(t)$ هنگامی SSCS است که به ازاء هر m صحیح رابطه زیر برقرار باشد

$$F(x_1, \dots, x_n, \dots; t_1 + mT, \dots, t_n + mT) = F(x_1, \dots, x_n, \dots; t_1, \dots, t_n) \quad (6-56)$$

فرآیند $X(t)$ را زمانی فرآیند ایستادن دوری به مفهوم ضعیف WSCS می‌نامند که به ازاء هر m صحیح

$$\eta(t + mT) = \eta(t) \quad , \quad R(t_1 + mT, t_2 + mT) = R(t_1, t_2) \quad (6-57)$$

با توجه به تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر فرآیند $X(t)$ ، SSCS باشد در آن صورت WSCS نیز است. قضایای زیر ارتباط نزدیک فرآیندهای ایستان و ایستان دوری را نشان می‌دهند.

قضیه SSS, SSCS

اگر $X(t)$ فرآیند SSCS بوده و θ یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $(0, T)$ و مستقل از $X(t)$ باشد آنگاه فرآیند جابه‌جا شده

$$\bar{X}(t) = X(t - \theta) \quad (6-58)$$

که از جابه‌جائی تصادفی مبدأ بوجود می‌آید فرآیندی SSS بوده و توزیع مرتبه n ام آن برابر است با

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{T} \int_0^T F(x_1, \dots, x_n; t_1 - \alpha, \dots, t_n - \alpha) d\alpha \quad (6-59)$$

برای اثبات این قضیه کافی است که نشان دهیم احتمال پیش‌آمد

$$A = \{\bar{X}(t_1 + c) \leq x_1, \dots, \bar{X}(t_n + c) \leq x_n\}$$

مستقل از C بوده و با طرف راست رابطه (۶-۵۹) برابر است. می‌دانیم که

$$P(A) = \frac{1}{T} \int_0^T P(A/\theta = \theta) d\theta \quad (6-60)$$

علاوه بر آن،

$$P(A/\theta = \theta) = P\{X(t_1 + c - \theta) \leq x_1, \dots, X(t_n + c - \theta) \leq x_n / \theta\}$$

و از آنجا که θ مستقل از $X(t)$ است نتیجه می‌گیریم که

$$P(A/\theta = \theta) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + c - \theta, \dots, t_n + c - \theta)$$

با قرار دادن نتیجه فوق در رابطه (۶-۶۰) و استفاده از تعریف SSCS

در (۶-۵۶) حکم قضیه (۶-۵۹) اثبات می‌شود.

قضیه WSS, WSCS

اگر $X(t)$ فرآیندی WSCS باشد آنگاه فرآیند جابه‌جا شده $\bar{X}(t)$

فرآیندی WSS با متوسط

$$\bar{\eta} = \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt \quad (6-61)$$

و خود بستگی زیر خواهد بود

$$\bar{R}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T R(t + \tau, t) dt \quad (6-62)$$

برای اثبات می‌توان گفت که با توجه به استقلال θ از $X(t)$ داریم

$$E\{X(t - \theta)\} = E\{\eta(t - \theta)\} = \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t - \theta) d\theta$$

و چون $\eta(t)$ متناوب است رابطه (۶-۶۱) اثبات می شود مشابهاً

$$E\{X(t+\tau-\theta)X(t-\theta)\} = E\{R(t+\tau-\theta, t-\theta)\} \\ = \frac{1}{T} \int_0^T R(t+\tau-\theta, t-\theta) d\theta$$

و رابطه (۶-۶۲) به دست می آید چون $R(t+\tau, t)$ تابعی متناوب بر حسب t است

مثال ۳-۶

مثال مهمی از فرآیند ایستاد دوری، سیگنال تصادفی

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n h(t - nT) \quad (۶-۶۳)$$

می باشد که در آن $h(t)$ تابعی مفروض با تبدیل فوریه $H(\omega)$ و C_n

یک دنباله ایستاد از متغیرهای تصادفی با تابع خود بستگی

$$R_c[m] = E[C_{n+m}C_n]$$

و طیف توان

$$S_c(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_c[m] e^{jm\omega} \quad (۶-۶۴)$$

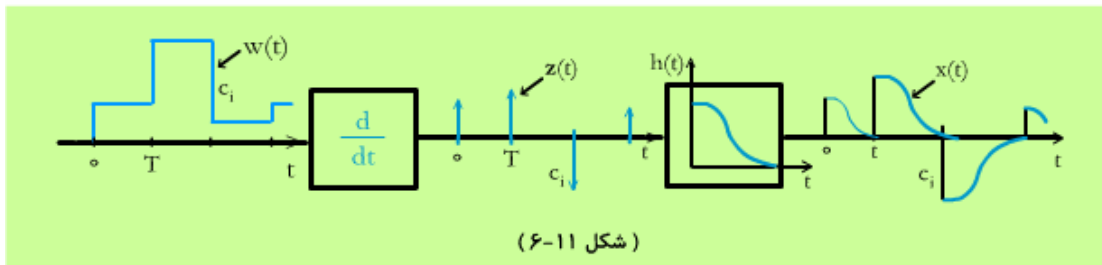
می‌توان نشان داد که طیف توان $\bar{S}_x(\omega)$ مربوط به فرآیند جابه‌جا شده $\bar{X}(t)$ برابر است با

$$\bar{S}_x(\omega) = \frac{1}{T} S_c(e^{j\omega}) |H(\omega)|^2 \quad (6-65)$$

برای اثبات دنباله‌ای از ضربه‌ها را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(t - nT)$$

بدیهی است $Z(t)$ مشتق فرآیند $W(t)$ مطابق شکل ۶-۱۱ است.



$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n U(t - nT) \quad , \quad Z(t) = W'(t)$$

فرآیند $W(t)$ فرآیندی ایستاد دوری با خود بستگی زیر است

$$R_w(t_1, t_2) = \sum_n \sum_r R_c(n-r) U(t_1 - nT) U(t_2 - rT)$$

با توجه به رابطه مشتق بین $Z(t)$ و $W(t)$ می‌توان نوشت

$$R_z(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_w(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \sum_n \sum_r R_c[n-r] \delta(t_1 - nT) \delta(t_2 - rT)$$

و در نتیجه

$$R_z(t + \tau, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_c[m] \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[t + \tau - (m+r)T] \delta(t - rT)$$

ابتدا تابع خود بستگی $\bar{R}_z(\tau)$ و طیف توان $\bar{S}_z(\omega)$ فرآیند جابه‌جا شده

$$\bar{Z}(t) = Z(t - \theta)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۶-۶۲) و استفاده از تساوی

$$\int_0^T \delta[t + \tau - (m+r)T] \delta(t - rT) dt = \delta(\tau - mT)$$

می‌توان نوشت

$$\bar{R}_z(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_c[m] \delta(\tau - mT)$$

و با گرفتن تبدیل فوریه داریم

$$\bar{S}_z(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_c[n] e^{-jmT\omega} = \frac{1}{T} S_c(\omega)$$

فرآیند $X(t)$ خروجی سیستمی خطی با ورودی $Z(t)$ است. بنابراین

$$X(t) = Z(t) * h(t) \quad , \quad \bar{X}(t) = \bar{Z}(t) * h(t)$$

پس می‌توان گفت طیف توان فرآیند جابه‌جا شده $\bar{X}(t)$

از رابطه (۶-۶۵) به دست می‌آید.

ضمناً اگر فرآیند C_n نویز سفید با $S_c(\omega) = q$ باشد آنگاه

$$\bar{S}_x(\omega) = \frac{q}{T} |H(\omega)|^2 \quad , \quad \bar{R}_x(\tau) = \frac{q}{T} h(t) * h(-t)$$

۴-۶ فرآیندهای باند محدود و نظریه نمونه برداری

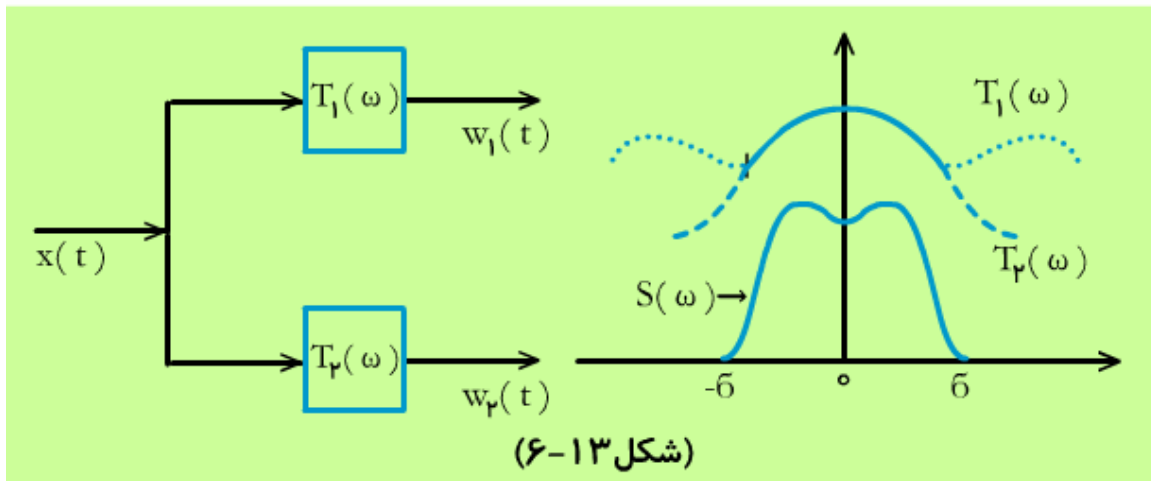
فرآیند $X(t)$ را هنگامی باند محدود [Band limited] (BL) می‌نامند که طیف آن به ازاء $\sigma > |\omega|$ محو شده و داری توان محدودی باشد، به عبارت دیگر

$$S(\omega) = 0, \quad |\omega| > \sigma, \quad R(0) < \infty \quad (6-66)$$

در این بخش برخی از خواص مهم فرآیندهای باند محدود را بررسی می‌کنیم.

قضیه

فرض کنیم $W_1(t)$ و $W_2(t)$ پاسخ سیستمهای $T_1(\omega)$ و $T_2(\omega)$ به فرآیند باند محدود $X(t)$ هستند (شکل ۱۳-۶).



اکنون نشان می‌دهیم که اگر

$$T_1(\omega) = T_p(-\omega), \quad |\omega| \leq \sigma$$

باشند آنگاه

$$W_1(t) \stackrel{ms}{=} W_p(t) \quad (6-67)$$

خواهد بود. برای اثبات می‌توان گفت $W_1(t) - W_p(t)$ پاسخ سیستم

$T_1(\omega) - T_p(\omega)$ به ورودی $X(t)$ است.

از آنجا که به ازاء

$$S(\omega) = 0, \quad |\omega| > \sigma$$

است نتیجه می‌گیریم که

$$E\{|W_1(t) - W_p(t)|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) |T_1(\omega) - T_p(\omega)|^2 d\omega = 0$$

بنابراین $W_1(t) \stackrel{ms}{=} W_p(t)$ است یعنی $W_1(t)$ از نظر مفهوم متوسط

مربع با $W_p(t)$ برابر است.

حال به خاصیت دیگر فرآیند باند محدود می‌پردازیم.

اگر فرآیند $X(t)$ باند محدود باشد آنگاه

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

در رابطه فوق، حدود انتگرال گیری محدود بوده و سطح $2\pi R(0)$

مربوط به $S(\omega)$ نیز محدود است.

بنابراین می‌توانیم از عبارت زیر علامت انتگرال مشتق بگیریم یعنی

$$R^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} (j\omega)^n S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تابع خود بستگی فرآیند باند محدود یک تابع تحلیلی است یعنی دارای مشتقات از هر مرتبه‌ای به ازاء هر مقدار τ است. بر اساس این خاصیت می‌توان گفت $X^{(n)}(t)$ به ازاء هر مقدار n وجود دارد.

از طرف دیگر نشان می‌دهیم که

$$X(t + \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)}(t) \frac{\tau^n}{n!} \quad (6-68)$$

برای اثبات رابطه فوق از رابطه (6-67) استفاده می‌کنیم.

می‌دانیم که (سری تیلور)

$$e^{j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} (j\omega)^n \frac{\tau^n}{n!} \quad \omega \text{ به ازاء جمع مقادیر } \omega \quad (6-69)$$

فرآیندهای $X(t + \tau)$ و $X^{(n)}(t)$ پاسخ سیستم‌های $(j\omega)^n$ ، $e^{j\omega\tau}$ به ورودی $X(t)$ هستند بنابراین اگر سیستم‌های $T_1(\omega)$ و $T_2(\omega)$ در رابطه با (6-67) را به صورت دو طرف رابطه (6-69) در نظر بگیریم، پاسخ‌های حاصله با دو طرف رابطه (6-68) برابر خواهد شد. چون رابطه (6-69) به ازاء جمع مقادیر ω صادق است، رابطه (6-68) را می‌توان از رابطه (6-67) نتیجه گرفت.

باند محدود بودن اغلب مترادف با تغییرات کند است.

اگر فرآیند $X(t)$ باند محدود باشد در آن صورت

$$E\{[X(t + \tau) - X(t)]^2\} \leq \sigma^2 \tau^2 R(0) \quad (6-70)$$

یا معادلاً

$$2[R(0) - R(\tau)] \leq \sigma^2 \tau^2 R(0) \quad (6-71)$$

برای اثبات از نامساوی آشنای $|\sin \varphi| \leq |\varphi|$ استفاده کرده و داریم

$$1 - \cos \omega\tau = 2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} \leq \frac{\omega^2\tau^2}{2}$$

از آنجا که $S(\omega)$ حقیقی و غیرمنفی بوده و از طرف دیگر

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

پس می توان نوشت

$$\begin{aligned} R(0) - R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) (1 - \cos \omega\tau) d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) \frac{\omega^2\tau^2}{2} d\omega \leq \frac{\sigma^2\tau^2}{4\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) d\omega = \frac{\sigma^2\tau^2}{2} R(0) \end{aligned}$$

که همان رابطه (۶-۷۱) است.

فصل ششم جلسه هفتم

۴-۶ فرآیندهای باند محدود و نظریه نمونه برداری

فرآیند $X(t)$ را هنگامی باند محدود [Band limited] (BL) می نامند

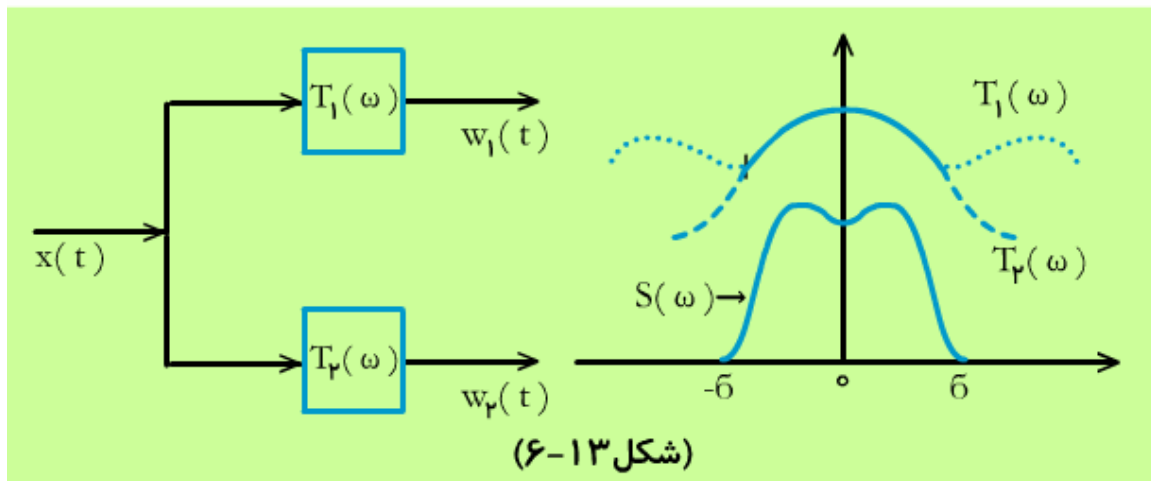
که طیف آن به ازاء $\sigma > |\omega|$ محو شده و داری توان محدودی باشد،

به عبارت دیگر

$$S(\omega) = 0, \quad |\omega| > \sigma, \quad R(0) < \infty \quad (6-66)$$

در این بخش برخی از خواص مهم فرآیندهای باند محدود را بررسی می کنیم.

فرض کنیم $W_1(t)$ و $W_2(t)$ پاسخ سیستمهای $T_1(\omega)$ و $T_2(\omega)$ به فرآیند باند محدود $X(t)$ هستند (شکل ۶-۱۳)



اکنون نشان می‌دهیم که اگر

$$T_1(\omega) = T_2(-\omega), \quad |\omega| \leq \sigma$$

باشند آنگاه

$$W_1(t) \stackrel{ms}{=} W_2(t) \quad (6-67)$$

خواهد بود. برای اثبات می‌توان گفت $W_1(t) - W_2(t)$ پاسخ سیستم

$T_1(\omega) - T_2(\omega)$ به ورودی $X(t)$ است.

از آنجا که به ازاء

$$S(\omega) = 0, \quad |\omega| > \sigma$$

است نتیجه می‌گیریم که

$$E\{|W_1(t) - W_2(t)|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) |T_1(\omega) - T_2(\omega)|^2 d\omega = 0$$

بنابراین $W_1(t) \stackrel{ms}{=} W_2(t)$ است یعنی $W_1(t)$ از نظر مفهوم متوسط

مربع با $W_2(t)$ برابر است.

حال به خاصیت دیگر فرآیند باند محدود می پردازیم.

اگر فرآیند $X(t)$ باند محدود باشد آنگاه

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

در رابطه فوق، حدود انتگرال گیری محدود بوده و سطح $2\pi R(0)$

مربوط به $S(\omega)$ نیز محدود است.

بنابراین می توانیم از عبارت زیر علامت انتگرال مشتق بگیریم یعنی

$$R^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} (j\omega)^n S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

این نتیجه نشان می دهد که تابع خود بستگی فرآیند باند محدود یک تابع تحلیلی است یعنی دارای مشتقات از هر مرتبه ای به ازاء هر مقدار τ است. بر اساس این خاصیت می توان گفت $X^{(n)}(t)$ به ازاء هر مقدار n وجود دارد.

از طرف دیگر نشان می دهیم که

$$X(t + \tau) \stackrel{ms}{=} \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)}(t) \frac{\tau^n}{n!} \quad (6-68)$$

برای اثبات رابطه فوق از رابطه (6-67) استفاده می کنیم.

می دانیم که (سری تیلور)

$$e^{j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} (j\omega)^n \frac{\tau^n}{n!} \quad \omega \text{ به ازاء جمیع مقادیر } \quad (6-69)$$

فرآیندهای $X(t + \tau)$ و $X^{(n)}(t)$ پاسخ سیستم‌های $(j\omega)^n$ ، $e^{j\omega\tau}$ به ورودی $X(t)$ هستند بنابراین اگر سیستم‌های $T_1(\omega)$ و $T_2(\omega)$ در رابطه با (۶-۶۷) را به صورت دو طرف رابطه (۶-۶۹) در نظر بگیریم، پاسخ‌های حاصله با دو طرف رابطه (۶-۶۸) برابر خواهد شد. چون رابطه (۶-۶۹) به ازاء جمیع مقادیر ω صادق است، رابطه (۶-۶۸) را می‌توان از رابطه (۶-۶۷) نتیجه گرفت. باند محدود بودن اغلب مترادف با تغییرات کند است. اگر فرآیند $X(t)$ باند محدود باشد در آن صورت

$$E\{[X(t + \tau) - X(t)]^2\} \leq \sigma^2 \tau^2 R(0) \quad (6-70)$$

یا معادلاً

$$2[R(0) - R(\tau)] \leq \sigma^2 \tau^2 R(0) \quad (6-71)$$

برای اثبات از نامساوی آشنای $|\sin \varphi| \leq |\varphi|$ استفاده کرده و داریم

$$1 - \cos \omega \tau = 2 \sin^2 \frac{\omega \tau}{2} \leq \frac{\omega^2 \tau^2}{2}$$

از آنجا که $S(\omega)$ حقیقی و غیرمنفی بوده و از طرف دیگر

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

پس می توان نوشت

$$\begin{aligned} R(0) - R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) (1 - \cos \omega \tau) d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) \frac{\omega^2 \tau^2}{2} d\omega \leq \frac{\sigma^2 \tau^2}{4\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) d\omega = \frac{\sigma^2 \tau^2}{2} R(0) \end{aligned}$$

که همان رابطه (۶-۷۱) است.

بسط های مبتنی بر نمونه برداری

بر اساس قضیه نمونه برداری از سیگنال های یقینی، اگر $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

بوده و به ازاء $|\omega| > \sigma$ ، $F(\omega) = 0$ باشد آنگاه تابع $f(t)$

را می توان برحسب نمونه های آن $f(nT)$ بیان کرد. به طوری که $T = \pi/\sigma$ بازه نایکوئیست [Nyquist] می باشد. با اعمال بسط مذکور به تابع خودبستگی

$R(\tau)$ مربوط به فرآیند باند محدود $X(t)$ می توان نوشت

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(nT) \frac{\sin \sigma(\tau - nT)}{\sigma(\tau - nT)} \quad (6-72)$$

حال بسط مشابه ای برای فرآیند $X(t)$ ارائه می دهیم

اگر $X(t)$ فرآیندی تصادفی و باند محدود باشد آنگاه به ازاء هر t و هر τ رابطه زیر صادق است

$$X(t + \tau) \stackrel{ms}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t + nT) \frac{\text{Sin } \sigma(\tau - nT)}{\sigma(\tau - nT)}, T = \pi/\sigma \quad (6-73)$$

برای اثبات تابع نمایی $e^{j\omega\tau}$ را به صورت تابعی از ω که در آن τ یک پارامتر است در نظر گرفته و آن را به شکل سری فوریه در بازه $(-\sigma \leq \omega \leq \sigma)$ بسط می دهیم. ضرایب این بسط برابرند با

$$a_n = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{j\omega\tau} e^{-jnT\omega} d\omega = \frac{\text{Sin } \sigma(\tau - nT)}{\sigma(\tau - nT)}$$

بنابراین

$$e^{j\omega\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnT\omega} \frac{\text{Sin } \sigma(\tau - nT)}{\sigma(\tau - nT)}, |\omega| \leq \sigma \quad (6-74)$$

اگر طرف چپ و طرف راست عبارت بالا را با $T_1(\omega)$ و $T_p(\omega)$ نشان دهیم،

بدیهی است که $T_1(\omega)$ یک خط تأخیر بوده و پاسخ آن $[W_1(t)]$

به ورودی $X(t)$ برابر $X(t + \tau)$ خواهد بود.

هم چنین پاسخ $W_p(t)$ مربوط به $T_p(\omega)$ به ورودی $X(t)$

با طرف راست رابطه (6-73) برابر خواهد شد.

از آنجا که به ازاء $|\omega| < \sigma$ ، $T_1(\omega) = T_p(\omega)$ می باشد

پس می توان رابطه (6-73) را با استناد به رابطه (6-67) نتیجه گرفت.

سیگنال باند محدود یقینی را هنگامی می توان شناخته و به دست آورد

که تمام نمونه‌های آن شامل گذشته و آینده معلوم باشد.
 این شرط برای سیگنال‌های تصادفی ضروری نیست.
 نشان می‌دهیم که می‌توان فرآیند $X(t)$ باند محدود را با مجموع فقط
 نمونه‌های گذشته آن $X(nT_0)$ با دقت خوبی تقریب زد مشروط بر آنکه
 $T_0 < T$ باشد.
 برای روشن تر شدن موضوع ابتدا مثالی را مطرح می‌کنیم.

مثال ۵-۶

فرآیند زیر را در نظر بگیرید.

$$\hat{X}(t) = nX(t-T_0) - \binom{n}{1} X(t-2T_0) + \dots - (-1)^n X(t-nT_0)$$

(۶-۷۵)

تفاضل

$$Y(t) = X(t) - \hat{X}(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} X(t-kT_0)$$

پاسخ سیستم

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} e^{-jkT_0\omega} = (1 - e^{-j\omega T_0})^n$$

به ورودی $X(t)$ است.

از آن جا که

$$|H(\omega)| = \left| 2 \sin\left(\frac{\omega T_0}{2}\right) \right|^n$$

می توان گفت

$$E\{Y^r(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) \left(2 \sin \frac{\omega T_0}{2} \right)^{rn} d\omega \quad (6-76)$$

اگر $T_0 < \frac{\pi}{3\sigma}$ باشد آن گاه به ازاء

$$2 \sin \left| \frac{\omega T_0}{2} \right| < 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1, \quad |\omega| < \sigma$$

خواهد بود.

تحت این شرایط عبارت زیر انتگرال رابطه (6-76) به ازاء $n \rightarrow \infty$ به صفر میل خواهد کرد.

بنابراین

$$E\{Y^r(t)\} \rightarrow 0 \quad \text{و}$$
$$\hat{X}(t) \xrightarrow{ms} X(t), \quad n \rightarrow \infty$$

باید توجه کرد که این نتیجه به ازاء $T_0 < \frac{T}{3}$ معتبر است.
($\frac{1}{T}$ نرخ نمونه برداری نایکوئیست است).

علاوه بر آن ضرایب $\binom{n}{k}$ مربوط به $\hat{X}(t)$ به ازاء $n \rightarrow \infty$ به بی نهایت میل می کنند

فرض کنید عدد $T_0 < T$ و ثابت $\epsilon > 0$ داده شده است. می توان مجموعه ضرایب a_k را به نحوی به دست آورد که

$$E\{|X(t) - \hat{X}(t)|^2\} < \epsilon \quad \text{و} \quad \hat{X}(t) = \sum_{k=1}^n a_k X(t - kT_0) \quad (6-77)$$

که در آن n ثابت به اندازه کافی بزرگ است. برای اثبات باید گفت که فرآیند $\hat{X}(t)$ خروجی سیستم

$$P(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k e^{jkT_0\omega} \quad (6-88)$$

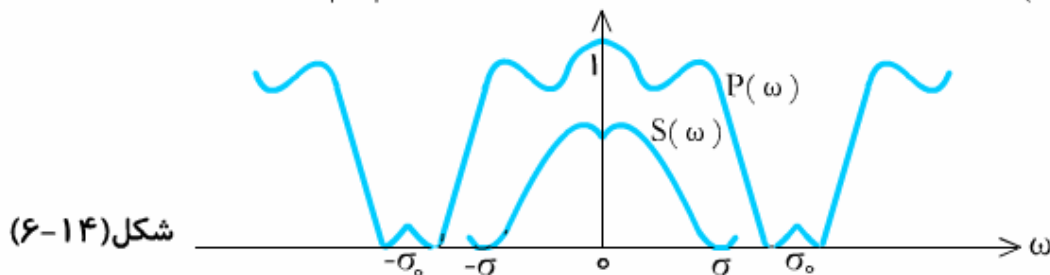
به ازاء ورودی $X(t)$ است.

بنابراین

$$E\{|X(t) - \hat{X}(t)|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} S(\omega) |1 - P(\omega)|^2 d\omega$$

پس کافی است که مجموعی از توابع نمایی با نماهای فقط مثبت را یافت که تا حد نزدیکی تقریبی از یک باشد.

این امر به ازاء هر $|\omega| < \sigma_0 = \frac{\pi}{T_0}$ امکان پذیر نیست چون $P(\omega)$ با تناوب $2\sigma_0$ متناوب است. به هر حال می توان نشان داد که اگر $\sigma_0 > \sigma$ باشد تعیین $P(\omega)$ به نحوی که تفاضل $|1 - P(\omega)|$ به ازاء $|\omega| < \sigma$ مانند شکل (۶-۱۴)



شکل (۶-۱۴)

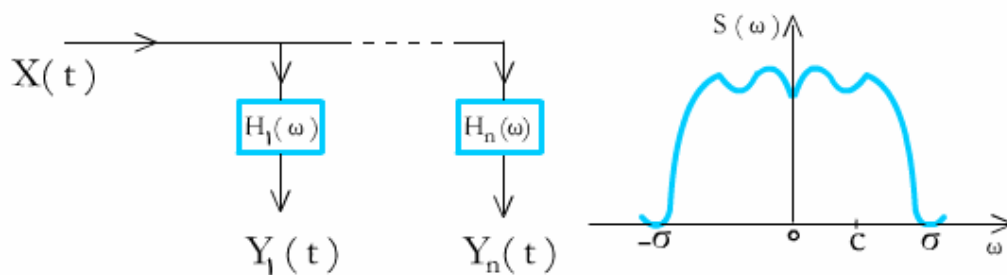
تا حد دلخواهی کوچک گردد ، قابل تحقق است.

اثبات مبتنی بر قضیه تقریب Weierstrass و قضیه فاکتوربندی Fejer-Riesz بوده ولی جزئیات این قضایا ساده و سهل الوصول نمی باشد . باید توجه کرد که مانند مثال (۶-۵) به ازاء $\varepsilon \rightarrow 0$ ضرایب a_k به ∞ میل می کنند.

علت آن این واقعیت است که یافتن مجموع $P(\omega)$ از توابع نمایی مشابه رابطه (۶-۸۸) به نحوی که به ازاء هر ω در یک بازه $|1-P(\omega)| = 0$ باشد ممکن نیست. این امر سبب عدم رعایت معیار پالی-وینر خواهد بود.

قضیه نمونه برداری پابولیس

بسط نمونه برداری فقط به ازاء $T \leq \frac{\pi}{\sigma}$ معتبر است. بنا به قضیه زیر اگر به نمونه های خروجی های $Y_1(t), \dots, Y_N(t)$ سیستم خطی $H_1(\omega), \dots, H_N(\omega)$ که توسط $X(t)$ تحریک می شوند (شکل ۶-۱۵) دسترسی داشته باشیم. در آن صورت می توانیم بازه نمونه برداری را از $\frac{\pi}{\sigma}$ به $N \frac{\pi}{\sigma}$ افزایش داد.



(شکل ۶-۱۵)

مقادیر ثابت

$$C = \frac{2\sigma}{N} = \frac{2\pi}{T} \quad (6-89)$$

و N تابع

$$P_1(\omega, t), \dots, P_N(\omega, t)$$

را به عنوان جواب سیستم معادلات زیر تعریف می‌کنیم.

$$H_1(\omega)P_1(\omega, \tau) + \dots + H_N(\omega)P_N(\omega, \tau) = 1$$

$$H_1(\omega+c)P_1(\omega, \tau) + \dots + H_N(\omega+c)P_N(\omega, \tau) = e^{jc\tau}$$

$$H_1(\omega+Nc-c)P_1(\omega, \tau) + \dots + H_N(\omega+Nc-c)P_N(\omega, \tau) = e^{j(N-1)c\tau} \quad (6-70)$$

در معادلات فوق، ω تمام مقادیر ممکن در بازه $(-\sigma, -\sigma+c)$ را اختیار کرده و τ پارامتر دلخواه است.

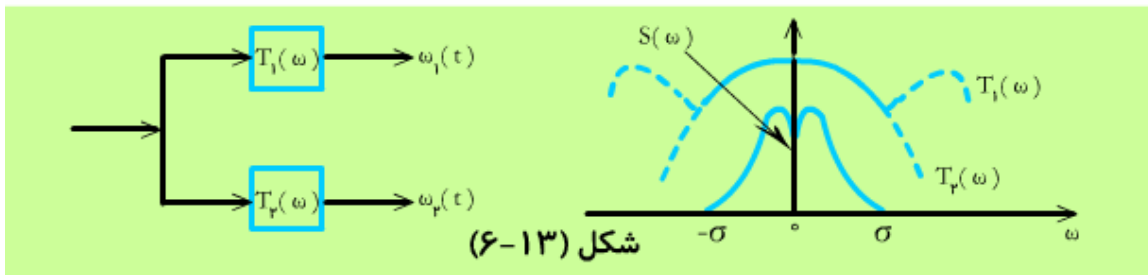
اکنون N تابع زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$P_k(\tau) = \frac{1}{C} \int_{-\sigma}^{-\sigma+c} P_k(\omega, \tau) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad 1 \leq k \leq N \quad (6-71)$$

$$X(t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [Y_1(t+n\bar{T})p_1(\tau-n\bar{T}) + \dots + Y_N(t+n\bar{T})p_N(\tau-n\bar{T})] \quad (6-72)$$

برای اثبات باید گفت که فرآیند $Y_i(t+n\bar{T})$ پاسخ سیستم $H_i(\omega)e^{jn\bar{T}\omega}$ به ورودی $X(t)$ است.

بنابراین اگر سیستم‌های $T_1(\omega)$ و $T_r(\omega)$ در شکل (۶-۱۳) را دو طرف تساوی زیر در نظر بگیریم.



شکل (۶-۱۳)

$$e^{j\omega\tau} = H_1(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_1(\tau-n\bar{T})e^{jn\omega\bar{T}} + \dots + H_N(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_N(\tau-n\bar{T})e^{jn\omega\bar{T}} \quad (6-73)$$

پاسخ‌های حاصل از این دو سیستم طرفین رابطه (۶-۷۲) خواهد بود.

بنابراین به منظور اثبات رابطه (۶-۷۲) کافی است که نشان دهیم رابطه (۶-۷۳) به ازاء جميع مقادير $|\omega| \leq \sigma$ صادق است.

ضرایب $H_k(\omega+k\bar{c})$ در رابطه (۶-۷۳) مستقل از τ بوده و طرف راست مرکب از توابع متناوب بر حسب τ با تناوب $\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{c}}$ می‌باشد چون $e^{jk\bar{c}\bar{T}} = 1$ است.

پس جواب‌های $p_k(\omega, \tau)$ متناوب هستند.

$$p_k(\omega, \tau - n\bar{T}) = p_k(\omega, \tau)$$

با توجه به رابطه فوق و رابطه (۶-۷۱) می‌توان نتیجه گرفت که

$$p_k(\tau - n\bar{T}) = \frac{1}{c} \int_{-\sigma}^{-\sigma+c} P_k(\omega, \tau) e^{j\omega(\tau - n\bar{T})} d\omega$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که اگر تابع $P_k(\omega, \tau) e^{j\omega\tau}$ را در بازه $(-\sigma, -\sigma+c)$

به صورت سری فوریه بسط دهیم، ضرایب بسط برابر $p_k(\tau - n\bar{T})$ خواهد بود. پس

$$P_k(\omega, \tau) e^{j\omega\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_k(\tau - n\bar{T}) e^{jn\omega\bar{T}}, \quad -\sigma < \omega < -\sigma + c \quad (6-74)$$

حال با ضرب کردن هر معادله در سیستم معادلات (۶-۷۳) در $e^{j\omega\tau}$ و با استفاده از

رابطه (۶-۷۴) و نیز تساوی

$$e^{jn(\omega+kc)\bar{T}} = e^{jn\omega\bar{T}}$$

نتیجه می‌گیریم که رابطه (۶-۷۳) به ازاء جميع مقادیر ω در بازه

$(-\sigma, \sigma)$ صادق است.

نمونه برداری انفالی

می‌خواهیم $F(\omega)$ یعنی تبدیل فوریه سیگنال یقینی $f(t)$ را بر حسب مجموعی شامل نمونه‌های $f(t)e^{j\omega t}$ تخمین بزنیم. اگر انتگرال $f(t)e^{j\omega t}$ را با مجموع ریمان Riemann آن تقریب بزنیم، تخمین زیر را خواهیم داشت.

$$F(\omega) \simeq F_*(\omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} T f(nT) e^{-jn\omega T} \quad (6-75)$$

با استناد به فرمول جمع پواسون یعنی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+nc) = \frac{1}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(nu_0) e^{jnu_0 x}, \quad u_0 = \frac{2\pi}{c} \quad (6-76)$$

می‌توان نتیجه گرفت که $F_*(\omega)$ با مجموع $F(\omega)$ و نسخ جابجا شده آن برابر است

$$F_*(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + 2n\sigma), \quad \sigma = \frac{\pi}{T}$$

بنابراین $F_*(\omega)$ را می‌توان به عنوان تخمین $F(\omega)$ در بازه $(-\sigma, \sigma)$ به کار برد، مشروط بر آن که $F(\omega)$ در خارج از این بازه مقادیر قابل نظر کردنی داشته باشد. تفاضل $F(\omega) - F_*(\omega)$ را خطای تا خوردگی Aliasing error نامند. در سطور زیرین به جای نمونه‌های متساوی الفاصله $f(nT)$ در رابطه (6-75) نمونه‌های $f(t_i)$ در مجموعه‌ای از نقاط تصادفی t_i را قرار داده و ماهیت خطای به وجود آمده را بررسی می‌کنیم. می‌توان نشان داد که اگر t_i یک فرآیند نقاط پواسون با چگالی متوسط λ باشد، در آن صورت مجموع

$$P(\omega) \equiv \frac{1}{\lambda} \sum_i f(t_i) e^{-j\omega t_i} \quad (6-77)$$

تخمین بایاس نشده از $F(\omega)$ خواهد بود. علاوه بر این اگر انرژی $f(t)$ یعنی

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt$$

محدود باشد آن گاه به ازاء

$$P(\omega) \rightarrow F(\omega) \quad , \quad \lambda \rightarrow \infty$$

میل می کند. برای اثبات کافی است که نشان دهیم

$$E\{P(\omega)\} = F(\omega) \quad , \quad \sigma_{P(\omega)}^2 = \frac{E}{\lambda} \quad (6-78)$$

بدیهی است که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \sum_i \delta(t-t_i) dt = \sum_i f(t_i) e^{-j\omega t_i} \quad (6-79)$$

با مقایسه رابطه فوق با رابطه (6-77) داریم

$$P(\omega) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) Z(t) e^{-j\omega t} dt \quad , \quad Z(t) = \sum_i \delta(t-t_i) \quad (6-80)$$

که $Z(t)$ دنباله ضربه‌های پواسون با پارامترهای زیر است.

$$E\{Z(t)\} \equiv \lambda \quad , \quad C_Z(t_1, t_2) = \lambda \delta(t_1 - t_2) \quad (6-81)$$

بنابراین

$$E\{P(\omega)\} = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) E\{Z(t)\} e^{j\omega t} dt = F(\omega)$$

$$\sigma_{P(\omega)}^2 = \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) f(t_2) \lambda \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t_2) dt_2$$

و رابطه (۶-۷۸) به دست می‌آید.

با توجه به این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که به منظور رسیدن به تخمین رضایت بخشی از $F(\omega)$ ، λ باید در شرط زیر صدق کند.

$$|F(\omega)| \gg \sqrt{\frac{E}{\lambda}} \quad (۶-۸۲)$$

مثال ۶-۶

فرض کنید $f(t)$ مجموعی از امواج سینوسی در بازه $(-a, a)$ بوده

$$f(t) = \sum_k C_k e^{j\omega_k t}, \quad |t| < a$$

و $f(t)$ در $|t| > a$ برابر صفر می‌باشد. در این مورد،

$$F(\omega) = \sum_k 2C_k \frac{\sin a(\omega - \omega_k)}{(\omega - \omega_k)}, \quad E \simeq 2a \sum_k |C_k|^2$$

(۶-۸۳)

که از عبارات حاصل ضرب‌های متقاطع در محاسبه E صرف نظر کرده‌ایم.

اگر a به اندازه کافی بزرگ باشد آن گاه $F(\omega_k) \simeq 2aC_k$ ، بوده و این نتیجه نشان می دهد که اگر

$$\sum_i |C_i|^2 \ll 2a\lambda |C_k|^2$$

باشد در آن صورت $P(\omega_k) \simeq F(\omega_k)$ خواهد بود.

بنابراین با استفاده از نمونه برداری اتفاقی می توان طیف های خطی هر فرکانسی را آشکار کرد، حتی اگر نرخ متوسط λ کوچک باشد مشروط بر آن که زمان مشاهده $2a$ بزرگ منظور شود.

فصل ششم جلسه هشتم

۵-۶ سیگنال های یقینی در نویز

مسأله اساسی در کاربردهای فرآیندهای تصادفی در واقع تخمین سیگنال در شرایط وجود و حضور نویز است.

این مسأله مفاهیم و جنبه های بسیاری دارد که برخی از آن ها در فصل هشتم مطرح خواهد گردید.

در این بخش دو مورد را که به جواب های ساده ای منجر می شوند بررسی می نماییم. در هر دو مورد، سیگنال تابع یقینی $f(t)$ بوده و نویز یک فرآیند تصادفی $\gamma(t)$ با متوسط صفر در نظر گرفته می شود.

۱) اصول فیلتر منطبق

موضوع مورد بررسی در واقع یک مساله نوعی در رادار است. سیگنالی با شکل شناخته شده و معلوم از هدف دور منعکس می‌شود. سیگنال دریافتی به صورت مجموع زیر است.

$$X(t) = f(t) + \gamma(t) \quad , \quad E\{\gamma(t)\} = 0$$

که در آن $f(t)$ نسخه جابجا شده و مقیاس یافته سیگنال ارسالی و $\gamma(t)$ فرآیند WSS با طیف توان معلوم $S(\omega)$ می‌باشد. فرض می‌کنیم که $f(t)$ معلوم بوده و می‌خواهیم وجود و موقعیت مکانی آن را تعیین کنیم. بدین منظور فرآیند $X(t)$ را به فیلتر خطی با پاسخ ضربه $h(t)$ و تابع سیستم $H(\omega)$ اعمال کرده و خروجی حاصله یعنی

عبارت است از $Y(t) = X(t) * h(t)$

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\alpha)h(\alpha) d\alpha = Y_f(t) + Y_\gamma(t) \quad (6-84)$$

که در آن

$$Y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\alpha)h(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6-85)$$

پاسخ فیلتر به سیگنال $f(t)$ و مولفه تصادفی با توان متوسط زیر است.

$$E\{Y_\gamma^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \quad (6-86)$$

از آن جا که $Y_\gamma(t)$ معلول $\gamma(t)$ بوده و $E\{\gamma(t)\} = 0$ است نتیجه می گیریم که

$$E\{Y_\gamma(t)\} = 0, \quad E\{\gamma(t)\} = Y_f(t)$$

است. هدف این بررسی تعیین $H(\omega)$ به نحوی است که نسبت سیگنال به نویز زیر در زمان مشخص و معین t_0 حداکثر شود.

$$\rho = \frac{|Y_f(t_0)|}{\sqrt{E\{Y_\gamma^2(t_0)\}}} \quad (6-89)$$

ابتدا فرض کنید که $S(\omega) = \sigma_n^2$ است. با اعمال نامساوی شوارتز Schwarz به انتگرال دوم رابطه (۶-۸۵) می توان نتیجه گرفت که

$$\rho^2 \leq \frac{\int |F(\omega) e^{j\omega t_0}|^2 d\omega \int |H(\omega)|^2 d\omega}{2\pi\sigma_n^2 \int |H(\omega)|^2 d\omega} = \frac{E_f}{\sigma_n^2} \quad (6-90)$$

که در آن

$$E_f = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int |F(\omega)|^2 d\omega$$

انرژی $f(t)$ است.

نامساوی فوق هنگامی به تساوی تبدیل می شود که

$$H(\omega) = k F^*(\omega) e^{j\omega t_0}, \quad h(t) = k f(t_0 - t) \quad (6-91)$$

رابطه فوق $H(\omega)$ بهینه با ضریب ثابت k را تعیین کرده و سیستم حاصله را فیلتر منطبق Matched Filter می نامند.

نسبت سیگنال به نویز به دست آمده در این شرایط حداکثر بوده و برابر

$$\sqrt{E_f/\sigma_n^2}$$
 خواهد بود

اگر $S(\omega)$ ثابت نباشد حل آن مانند حالت فوق ساده و آسان نیست. در این مورد ابتدا عبارت زیر انتگرال رابطه (۶-۸۵) را در $\sqrt{S(\omega)}$ ضرب و تقسیم کرده و سپس نامساوی شوارتز را اعمال می‌کنیم. نتیجه عبارت است از

$$\begin{aligned} |2\pi Y_f(t_0)|^2 &= \left| \int \frac{F(\omega)}{\sqrt{S(\omega)}} \sqrt{S(\omega)} H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2 \\ &\leq \int \frac{|F(\omega)|^2}{S(\omega)} d\omega \int S(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

با ترکیب رابطه فوق و رابطه (۶-۸۹) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \rho^2 &\leq \frac{\int \frac{|F(\omega)|^2}{S(\omega)} d\omega \int S(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}{2\pi \int S(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{|F(\omega)|^2}{S(\omega)} d\omega \quad (6-92) \end{aligned}$$

تساوی هنگامی رخ می‌دهد که

$$\sqrt{S(\omega)} H(\omega) = k \frac{F^*(\omega) e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{S(\omega)}}$$

پس نسبت سیگنال به نویز زمانی حداکثر است که

$$H(\omega) = k \frac{F^*(\omega)}{S(\omega)} e^{-j\omega t_0} \quad (6-93)$$

خط تأخیر انشعاب دار

فیلتر منطبق به طور کلی غیر علی بوده و تحقق آن کاری مشکل است.
راه حل زیر بهینه ولی ساده تر آن هنگامی امکان پذیر است که $H(\omega)$
خط تأخیر انشعاب دار باشد.

$$H(\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_m e^{-jm\omega T} \quad (6-94)$$

در این مورد

$$Y_f(t_0) = \sum_{i=0}^m a_i f(t_0 - iT) \quad , \quad Y_\gamma(t) = \sum_{i=0}^m a_i \gamma(t - iT) \quad (6-95)$$

و مساله در واقع یافتن $m+1$ ثابت a_i به نحوی است که نسبت سیگنال به نویز
حاصله حداکثر شود.

می توان نشان داد که ضرایب ثابت مجهول ، جواب سیستم معادلات زیر است.

$$\sum_{i=0}^m a_i R(nT - iT) = k f(t_0 - nT) \quad , \quad n = 0, \dots, m \quad (6-96)$$

که $R(\tau)$ تابع خود بستگی $\gamma(t)$ و k ضریب ثابت دلخواه می باشد

ii) هموارسازی

می‌خواهیم سیگنال نامعلوم $f(t)$ را بر حسب مقادیر مشاهده شده

$$X(t) = f(t) + \gamma(t)$$

تخمین بزنیم.

فرض می‌کنیم که نویز $\gamma(t)$ سفید با تابع خودبستگی معلوم

$$R(t_1, t_2) = q(t_1) \delta(t_1 - t_2)$$

می‌باشد. تخمین‌گر دوباره فیلتری با پاسخ ضربه $h(t)$ است که خروجی آن

$Y(t)$ تخمین مورد نظر خواهد بود.

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau) h(\tau) d\tau \quad (6-97)$$

تخمین‌گر بایاس شده با بایاس

$$b = Y_f(t) - f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) h(\tau) d\tau - f(t) \quad (6-98)$$

و با واریانس

$$\sigma^2 = E\{Y_\gamma^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} q(t-\tau) h^2(\tau) d\tau \quad (6-99)$$

هدف ما تعیین $h(t)$ به نحوی است که خطای متوسط مربع MS حداقل گردد.

$$c = E\{[Y(t) - f(t)]^2\} = b^2 + \sigma^2$$

فرض خواهیم کرد که $h(t)$ تابع مثبت زوج با سطح واحد و پهنای زمانی محدود می‌باشد .

$$h(-t)=h(t) \quad , \quad \int_{-T}^T h(t) dt=1 \quad , \quad h(t)>0$$

(۶-۱۰۰)

که در آن T مقدار ثابتی است که باید محاسبه و تعیین شود. اگر T کوچک باشد، $Y_f(t) \simeq f(t)$ خواهد بود. پس بایاس کوچک ولی واریانس بزرگ می‌باشد. با افزایش T ، واریانس کاهش یافته ولی بایاس افزایش می‌یابد. تعیین شکل و پهنای زمانی بهینه $h(t)$ به طور کلی امری پیچیده است. با فرض این که توابع $f(t)$ و $q(t)$ به نحوی همواره هستند که می‌توان $f(t)$ را با یک سهمی و $q(t)$ را با مقدار ثابت در هر بازه‌ای به طول $2T$ تقریب زد، راه حل ساده‌ای ارائه می‌دهیم.

با استناد به این فرض می‌توان نتیجه گرفت که به ازاء $|\tau| < T$

(بسط تیلور)

$$f(t-\tau) \simeq f(t) - \tau f'(t) + \frac{\tau^2}{2} f''(t) \quad , \quad q(t-\tau) \simeq q(t)$$

(۶-۱۰۱)

از آن جا که بازه انتگرال‌گیری در روابط (۶-۹۸) و (۶-۹۹) عبارت است از $(-T, T)$ می‌توان گفت

$$b \simeq \frac{f''(t)}{2} \int_{-T}^T \tau^2 h(\tau) d\tau \quad , \quad \sigma^2 \simeq q(t) \int_{-T}^T h^2(\tau) d\tau$$

(۶-۱۰۲)

چون تابع $h(t)$ زوج بوده و سطح آن برابر واحد است .

خطای MS حاصله برابر است با

$$e \simeq \frac{1}{4} M^2 [f''(t)]^2 + E q(t) \quad (6-103)$$

که در آن

$$E = \int_{-T}^T h^2(t) dt, \quad M = \int_{-T}^T t^2 h(t) dt$$

به منظور جدا کردن اثرات شکل و اندازه $h(t)$ بر روی خطاهای MS، فیلتر نرمالیزه شده زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\omega(t) = T h(Tt) \quad (6-104)$$

تابع $\omega(t)$ دارای سطح واحد بوده و به ازاء $|t| > 1$ ، $\omega(t) = 0$ است.

با توجه به

$$M_\omega = \int_{-1}^1 t^2 \omega(t) dt = \frac{M}{T^2}, \quad E_\omega = \int_{-1}^1 \omega^2(t) dt = TE$$

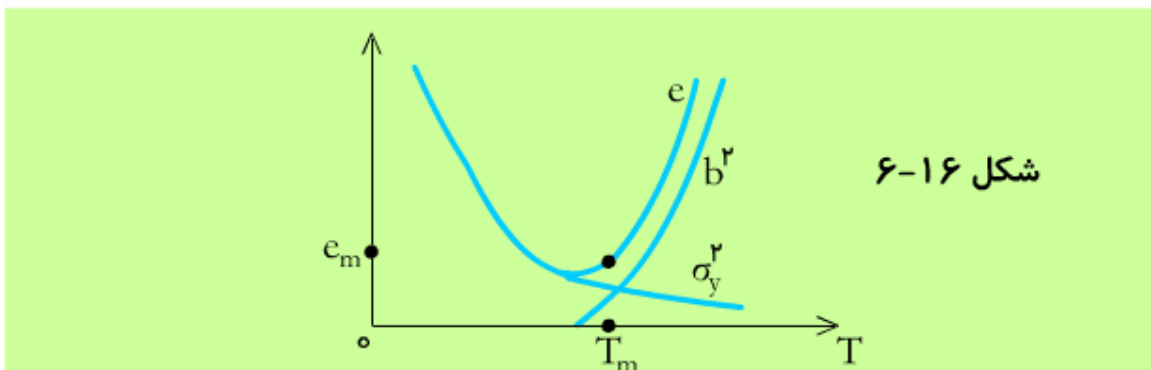
و با استناد به روابط (6-100) و (6-103) می‌توان نتیجه گرفت که

$$b \simeq \frac{T^2}{4} M_\omega f''(t), \quad \sigma^2 = \frac{E_\omega}{T} q(t) \quad (6-105)$$

$$e = \frac{1}{4} T^2 M_\omega^2 [f''(t)]^2 + \frac{E_\omega}{T} q(t) \quad (6-106)$$

بنابراین C به شکل $\omega(t)$ و مقدار ثابت T بستگی دارد.

ابتدا فرض می‌کنیم که $\omega(t)$ مشخص و معلوم است. در شکل 6-16، بایاس b ، واریانس σ^2 و خطای MS به صورت توابعی از T رسم شده است.



با افزایش T ، b^2 افزایش یافته ولی σ^2 کاهش می‌یابد.
مجموع آن‌ها یا e به ازاء $T=T_m$ زیر حداقل است.

$$T=T_m = \left(\frac{E_\omega q(t)}{M_\omega^2 [f''(t)]^2} \right)^{1/5} \quad (6-107)$$

با جایگزین کردن مقدار فوق در رابطه (6-105) و حذف محاسبات ساده به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$\sigma = 2b \quad (6-108)$$

بنابراین اگر $\omega(t)$ دارای شکل مشخصی بوده و T به نحوی انتخاب شود که e خطای MS حداقل گردد، آن‌گاه انحراف معیار خطای تخمین دو برابر بایاس آن خواهد بود.

یک تخمین ساده از $f(t)$ ، متوسط متحرک $X(t)$

$$Y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} X(\tau) d\tau$$

است. این مورد حالت خاصی از رابطه (6-97) است که در آن $\omega(t)$ فیلتر نرمالیزه شده برابر پالسی با پهنای 2 است.

در این مورد

$$M_\omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, \quad E_\omega = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt = \frac{1}{2}$$

با قرار دادن نتایج مذکور در رابطه (6-107) داریم

$$T_m = \sqrt[5]{\frac{9q(t)}{2[f''(t)]^2}}, \quad e = 5b^2 = \frac{5q(t)}{8T_m} \quad (6-109)$$

اکنون می‌خواهیم شکل $\omega(t)$ را به نحوی انتخاب کنیم که مجموع مندرج در رابطه (۶-۱۰۶) حداقل گردد.

از آن جا که لازم است $h(t)$ با یک ضریب مقیاسی تعیین شود کافی است که فرض کنیم E_ω مقدار ثابتی دارد.

بنابراین مساله ما یافتن تابع زوج مثبت $\omega(t)$ است که به ازاء $|t| > 1$ میرا شده و گشتاور دوم آن M_ω حداقل باشد. می‌توان نشان داد که

$$\omega(t) = \begin{cases} 0.75(1-t^2), & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}, E_\omega = \frac{3}{5}, M_\omega = \frac{1}{5}$$

(۶-۱۱۰)

می‌باشد

بنابراین $\omega(t)$ بهینه یک سهمی بریده شده است.

به ازاء $\omega(t)$ به دست آمده در فوق، فیلتر بهینه عبارت است از

$$h(t) = \frac{1}{T_m} \omega\left(\frac{t}{T_m}\right)$$

که در آن T_m مقدار ثابت در رابطه (۶-۱۰۷) می‌باشد.

البته این فیلتر تغییر پذیر با زمان است. چون ضریب مقیاسی T_m به t وابسته می‌باشد.

مسائل فصل ۶

۶-۱ تابع مشخصه مرتبه اول فرآیندهای زیر را تعیین کنید.

(الف) فرآیند پواسون. (ب) فرآیند وینر

$$[\text{پاسخ: (الف) } e^{\lambda t (e^{j\omega} - 1)}, \text{ (ب) } e^{-\alpha t \omega^2 / 2}]$$

۶-۲ فرآیند وینر $W(t)$ با پارامتر α داده شده است. فرآیندهای زیر را

تشکیل می دهیم.

$$X(t) = W(t^2) \quad Y(t) = W^2(t) \quad Z(t) = |W(t)|$$

نشان دهید که $X(t)$ فرآیندی نرمال با متوسط صفر است.

علاوه براین، اگر $t_1 < t_2$ باشد آنگاه

$$R_x(t_1, t_2) = \alpha t_1^2 \quad R_y(t_1, t_2) = \alpha^2 t_1 (2t_1 + t_2)$$

$$R_z(t_1, t_2) = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{t_1 t_2} (\cos \theta + \theta \sin \theta) \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$$

۶-۳ نشان دهید که اگر $W(t)$ و $W_\tau(t)$ به ترتیب پوش های مختلط فرآیندهای

$X(t)$ و $X(t-\tau)$ باشد در آن صورت

$$W_\tau(t) = W(t-\tau) e^{-j\omega_0 \tau}$$

خواهد بود.

۶-۴ نشان دهید که اگر $W(t)$ پوش مختلط بهینه $X(t)$ باشد آن گاه

$$E\{|W'(t)|^2\} = -2[R_x''(0) + \omega_0^2 R_x(0)]$$

۶-۵ نشان دهید که اگر فرآیند $X(t) \cos \omega t + Y(t) \sin \omega t$ نرمال و WSS باشد آن گاه خصوصیات آماری آن بر حسب واریانس فرآیند

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$

قابل تعیین است.

۶-۶ نشان دهید که اگر θ متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[0, T]$ بوده و $f(t)$ تابع متناوب با تناوب T باشد، آنگاه فرآیند $X(t) = f(t - \theta)$ ایستاد بوده و

$$S_x(\omega) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T f(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T} m)$$

۶-۷ نشان دهید که اگر

$$\epsilon_N(t) = X(t) - \sum_{n=-N}^N X(nT) \frac{\sin \sigma(t - nT)}{\sigma(t - nT)}, \quad \sigma = \frac{\pi}{T}$$

آنگاه

$$E\{\epsilon_N^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \left| e^{j\omega t} - \sum_{n=-N}^N \frac{\sin \sigma(t - nT)}{\sigma(t - nT)} e^{jn\omega T} \right|^2 d\omega$$

و اگر به ازاء $\sigma > |\omega|$ ، $S(\omega) = 0$ باشد در آن صورت به ازاء $N \rightarrow \infty$ $E\{\epsilon_N^2(t)\} \rightarrow 0$ میل خواهد کرد.

۶-۸ ثابت کنید که اگر مطابق رابطه (۶-۶۶) فرآیند $X(t)$

باند محدود باشد آنگاه به ازاء $|\tau| < \frac{\pi}{\sigma}$

$$\frac{\tau^2}{\pi^2} |R''(\circ)| \leq R(\circ) - R(\tau) \leq \frac{\tau^2}{\pi^2} |R''(\circ)|$$

$$E\{[X(t+\tau) - X(t)]^2\} \geq \frac{4\tau^2}{\pi^2} E\{[X'(t)]^2\}$$

{ راهنمایی: اگر $0 < \varphi < \frac{\pi}{\nu}$ باشد آنگاه $\sin \varphi < \frac{\nu \varphi}{\pi}$ خواهد بود }

۶-۹ فرآیند WSS، $X(t)$ مطابق رابطه (۶-۶۶) باند محدود بوده و

نمونه های آن $X(\frac{n\pi}{\sigma})$ ناهم بسته هستند، اگر

$$E[X^2(t)] = I \text{ و } E[X(t)] = \eta$$

باشد، $S_x(\omega)$ را به دست آورید.

۶-۱۰ طیف توان $S(\omega)$ مربوط به فرآیند $X(t)$ را به نحوی تعیین کنید که به ازاء

$$S(\omega) = 0, \quad |\omega| > \pi$$

$$E\{X(n+m)X(n)\} = N\delta[m]$$

باشد.

۶-۱۱ نشان دهید که اگر به ازاء $|\omega| > \sigma$ ، $S(\omega) = 0$ باشد آنگاه

$$R(\tau) \geq R(\circ) \cos \sigma \tau, \quad |\tau| < \frac{\pi}{\nu \sigma}$$

۶-۱۲ تابع متوسط و واریانس $P(\omega_0)$ را به نحوی تعیین کنید که t_i

یک فرآیند نقطه ای پواسون بوده و

$$P(\omega) = \frac{1}{\lambda} \sum \cos \omega \cdot t_i \cos \omega t_i, \quad |t_i| < a$$

باشد.

۶-۱۳ فرآیند WSS ، $X(t)$ و مجموعه ای از نقاط پواسون t_i مستقل از $X(t)$ با چگالی متوسط λ را در نظر بگیرید.

مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$X_c(\omega) = \sum_{|t_i| < c} X(t_i) e^{-j\omega t_i}$$

نشان دهید اگر

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau < \infty \quad \text{و} \quad E\{X(t)\} = 0$$

باشد، آنگاه به ازاء مقادیر بزرگ C خواهیم داشت

$$E\{|X_c(\omega)|^2\} = 2c S_x(\omega) + \frac{2c}{\lambda} R_x(0)$$

۶-۱۴ (نامساوی Cauchy) نشان دهید که

$$\left| \sum_i a_i b_i \right|^2 \leq \sum_i |a_i|^2 \sum_i |b_i|^2$$

که تساوی فقط در شرایط $a_i = k b_i^*$ برقرار است.

۶-۱۵ ورودی به سیستم $H(z)$ مجموع $X[n] = f[n] + V[n]$

می باشد که در آن $f[n]$ دنباله معلوم با تبدیل z ، $F[z]$ می باشد

می خواهیم $H(z)$ را به نحوی تعیین کنیم که نسبت

$$\frac{Y_f[0]}{E\{Y_f[n]\}}$$

خروجی $Y[n] = Y_f[n] + Y_v[n]$ حداکثر شود. نشان دهید که

(الف) اگر $V[n]$ نویز سفید باشد آنگاه $H(z) = k F(z^{-1})$ خواهد بود و

(ب) اگر $H(z)$ یک فیلتر با پاسخ ضربه محدود (FIR) یعنی

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}$$

باشد آنگاه وزنهای آن a_m جواب سیستم معادلات زیر خواهد بود.

$$\sum_{m=0}^N R_v[n-m] a_m = kf[-n], \quad n = 0, 1, \dots, N$$

۱۶-۶ اگر

$$H(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \text{و} \quad R_n(\tau) = N\delta(\tau)$$

و

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + n(t)$$

$$Y(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + Y_n(t)$$

که در آن $Y_n(t)$ مؤلفه خروجی $Y(t)$ به واسطه $n(t)$ است.

مقدار α را به نحوی تعیین کنید که نسبت سیگنال به نویز

$$\frac{|B|^2}{E\{Y_n^2(t)\}}$$

حداکثر شود.

[پاسخ: $\alpha = \omega_0$]

۶-۱۷ داده های $X(t) = f(t) + n(t)$ را که در آن

$$E\{n(t)\} = 0 \quad \text{و} \quad R_n(\tau) = N\delta(\tau)$$

است در نظر بگیرید. می خواهیم انتگرال

$$g(t) = \int_0^t f(\alpha) d\alpha$$

را تخمین بزنیم و در عین حال می دانیم که $g(T) = 0$ است.

نشان دهید که اگر به عنوان تخمین $g(t)$ فرآیند

$$W(t) = Z(t) - \frac{Z(T)t}{T}$$

را که در آن

$$Z(t) = \int_0^t X(\alpha) d\alpha$$

است به کار ببریم در آن صورت

$$\sigma_w^2 = Nt\left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad \text{و} \quad E\{W(t)\} = g(t)$$

خواهد بود.