معادلات دیفرانسیل:

یک معادله دیفرانسیل یقینی با تحریک تصادفی به شکل زیر است

$$a_n Y^{(m)}(t) + \dots + a_0 Y(t) = X(t) \qquad (۵-۸۶)$$

که در آن ضرایب a_k اعداد مفروض و تحریک $X(t)$ یک فرآیند تصادفی است.

می‌خواهیم $Y(t)$ را با فرض شرایط اولیه صفر حل کنیم.

با این فرض، $Y(t)$ یکتا (پاسخ حالت صفر) بوده و در شرایط خطی بودن صدق می‌کند بنابراین $Y(t)$ را به عنوان خروجی یک سیستم خطی تعریف شده توسط (۸۶ – ۵) تعبیر می‌کنیم.

هم چنان که می‌دانیم متوسط $\eta_y(t)$ در واقع خروجی (مدار خطی) L به ازاء ورودی $\eta_x(t)$ است. بنابراین در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$a_n \eta_y^{(n)}(t) + \dots + a_0 \eta_y(t) = \eta_x(t) \qquad (۵-۸۷)$$

و شرایط اولیه

$$\eta_y(0) = \dots = \eta_y^{(n-1)}(0) = 0 \qquad (۵-۸۸)$$

این نتیجه به طور مستقیم اثبات می‌شود ، واضح است که

$$E\{Y^{(k)}(t)\} = \eta_y^{(k)}(t) \qquad (۵-۸۹)$$

از طرفین رابطهٔ (۸۶ – ۵) امید ریاضی گرفته و با استفاده از رابطهٔ فوق رابطهٔ (۸۷ – ۵) به دست می‌آید. معادلهٔ (۸۸ – ۵) از (۸۹ – ۵) نتیجه می‌شود که بنا به فرض $Y^{(k)}(0) = 0$ می‌باشد.

برای تعیین هم‌بستگی $R_{xy}(t_1, t_2)$ باید گفت که

$$R_{xy}(t_1, t_2) = L_2[R_{xx}(t_1, t_2)]$$

در این حالت L_2 به این معنا است که $R_{xy}(t_1, t_2)$ در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند.

$$a_n \frac{\partial^n R_{xy}(t_1, t_2)}{\partial t_2^n} + \dots + a_0 R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_2) \qquad (۵-۹۰)$$

با شرایط اولیه

$$R_{xy}(t_1, 0) = \dots = \frac{\partial^{n-1} R_{xy}(t_1, 0)}{\partial t_2^{n-1}} \qquad (۵-۹۱)$$

به طور مشابه می‌توان گفت

$$R_{yy}(t_1, t_2) = L_1 [R_{xy}(t_1, t_2)]$$

مانند مورد قبل نتیجه می‌گیریم که

$$a_n \frac{\partial^n R_{yy}(t_1, t_2)}{\partial t_1^n} + \dots\dots + a_0 R_{yy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) \qquad (۵ - ۹۲)$$

$$R_{yy}(0, t_2) = \dots\dots = \frac{\partial^{n-1} R_{yy}(0, t_2)}{\partial t_1^{n-1}} = 0 \quad (۵ - ۹۳)$$

این نتایج را می‌توان مستقیماً به دست آورد.

با استناد به رابطهٔ (۸۶ – ۵) می‌توان گفت

$$X(t_1)[a_n Y^{(n)}(t_2) + \dots + a_0 Y(t_2)] = X(t_1) X(t_2)$$

و (۹۰ – ۵) به دست می‌آید زیرا داریم

$$E\{X(t_1) Y^{(k)}(t_2)\} = \frac{\partial^k R_{xy}(t_1, t_2)}{\partial t_2^k}$$

به طور مشابه (۹۲ – ۵) نتیجهٔ تساوی زیر است

$$[a_n Y^{(n)}(t_1) + \dots + a_0 Y(t_1)] Y(t_2) = X(t_1) Y(t_2)$$

چون

$$E\{X(t_1) Y^{(k)}(t_2)\} = \frac{\partial^k R_{yy}(t_1, t_2)}{\partial t_1^k}$$

در نهایت ، امید ریاضی روابط زیر

$$X(t_1) Y^{(k)}(0) = 0$$

$$Y^{(k)}(0) Y(t_2) = 0$$

روابط (۹۱ – ۵) و (۹۳ – ۵) را به دست می‌دهد.

گشتاورهای کلی

گشتاورهای (با هر مرتبه) خروجی $Y(t)$ یک سیستم خطی را می‌توان برحسب گشتاورهای ورودی $X(t)$ توصیف کرد.

برای توضیح این مطلب ، فرض کنید می‌خواهیم گشتاور مرتبه سوم $Y(t)$

$$R_{yyy}(t_1, t_2, t_3) = E\left\{Y_1(t)\, Y_2(t)\, Y_3(t)\right\}$$

را برحسب گشتاور مرتبه سوم $R_{xxx}(t_1, t_2, t_3)$ از ورودی $X(t)$ به دست آوریم.

$$E\left\{X(t_1)X(t_2)Y(t_3)\right\} = L_3\left[E\left\{X(t_1)X(t_2)X(t_3)\right\}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xxx}(t_1, t_2, t_3-\gamma)\, h(\gamma)\, d\gamma \qquad (۵-۹۴)$$

$$E\left\{X(t_1)Y(t_2)Y(t_3)\right\} = L_2\left[E\left\{X(t_1)X(t_2)Y(t_3)\right\}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xxy}(t_1, t_2-\beta, t_3)\, h(\beta)\, d\beta \qquad (۵-۹۵)$$

$$E\left\{Y(t_1)Y(t_2)Y(t_3)\right\} = L_1\left[E\left\{X(t_1)Y(t_2)Y(t_3)\right\}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xyy}(t_1-\alpha, t_2, t_3)\, h(\alpha)\, d\alpha \qquad (۵-۹۶)$$

توجه داریم که برای محاسبهٔ $R_{yyy}(t_1, t_2, t_3)$ در زمان های t_1, t_2, t_3 مشخص باید تابع $R_{xxx}(t_1, t_2, t_3)$ به ازاء هر لحظهٔ زمانی t_1, t_2, t_3 معلوم و شناخته شده باشد.

فرآیندهای برداری و سیستم‌هایی با چند ترمینال

اکنون سیستم‌هایی با n ورودی $r, X_i(t)$ خروجی $Y_j(t)$ را در نظر می‌گیریم.
در ابتدا نماد خود بستگی و هم بستگی فرآیندهای برداری را معرفی‌کرده
و بررسی خود را با نگاهی مجدد به نمادهای معمول در عملیات ماتریسی
آغاز می‌کنیم.

عبارت $A = [a_{ij}]$ ماتریسی با عنصر a_{ij} را نشان می‌دهد. نماد

$$A^t = [a_{ji}] \qquad A^* = [a_{ij}^*] \qquad A^h = [a_{ji}^*]$$

به ترتیب ترانسپوزه، مزدوج و مزدوج ترانسپوزه (هرمتیک) ماتریس A است.
بردار ستونی با $A=[a_i]$ مشخص می‌شود.
با توجه به متن ماتریس یا بردار بودن A معلوم می‌گردد

اگر $A = [a_i], B = [b_i]$ دو بردار m عنصری باشند حاصلضرب

$$A^t B = a_1 b_1 + \dots + a_m b_m$$

یک عدد وحاصلضرب $AB^t = [a_i b_j]$ ماتریسی $m \times m$ با عناصر $a_i b_j$ است.
فرآیند برداری $\mathbf{X}(t) = [X_i(t)]$ برداری است که مولفه‌های آن
فرآیندهای اتفاقی هستند.
متوسط $\mathbf{X}(t)$ یعنی $\eta(t) = E\{\mathbf{X}(t)\} = [\eta_i(t)]$

برداری با مولفه‌های $\eta_i(t) = E\{X_i(t)\}$ است.
خودبستگی $R_{xx}(t_1, t_2)$ یا $R(t_1, t_2)$ مربوط به $\mathbf{X}(t)$ در واقع ماتریس $m \times m$ زیر

$$R(t_1, t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1)\, \mathbf{X}^h(t_2)\} \qquad (۵-۹۷)$$

با مؤلفه‌های $E\{X_i(t_1) X_j^*(t_2)\}$ است.
به طور مشابه ماتریس هم بستگی حاصلضرب

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{\mathbf{X}(t_1)\, \mathbf{X}^h(t_2)\} \qquad (۵-۹۸)$$

مربوط به فرآیندهای برداری

$$\mathbf{X}(t) = [X_i(t)] \quad , \quad i = 1, \dots, m$$
$$,$$
$$\mathbf{Y}(t) = [Y_j(t)] \quad , \quad j = 1, \dots, r$$

را تعریف می‌کنیم.

سیستم چند ترمینالی با m ورودی $r, X_i(t)$ خروجی $Y_j(t)$ قاعده‌ای
برای اختصاص بردار $\mathbf{Y}(t)$ (r بعدی) به بردار $\mathbf{X}(t)$ (m بعدی) است

اگر سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشد این سیستم با ماتریس
پاسخ ضربه‌اش مشخص می‌گردد.
ماتریس مذکور در واقع ماتریس $r \times m$ است

$$H(t)=[h_{ji}(t)] \quad i=1,\dots,m \quad , \quad j=1,\dots,r \qquad (\text{۵}-\text{۹۹})$$

که به صورت زیر تعریف می‌شود.
$h_{ji}(t)$ پاسخ خروجی j ام به ورودی i ام است مشروط بر آنکه ورودی
i ام برابر $\delta(t)$ و بقیهٔ ورودی‌ها صفر باشند
با توجه به این تعریف و خاصیت خطی بودن سیستم نتیجه می‌شود که
پاسخ j ام خروجی $Y_j(t)$ به ورودی $\mathbf{X}(t)=[X_i(t)]$ برابر

$$Y_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h_{j1}(\alpha)X_1(t-\alpha)\,d\alpha+\dots+\int_{-\infty}^{\infty} h_{jm}(\alpha)X_m(t-\alpha)\,d\alpha$$

در نتیجه داریم:

$$\mathbf{Y}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha)\mathbf{X}(t-\alpha)\,d\alpha \qquad (\text{۵}-\text{۱۰۰})$$

در این رابطه $\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)$ بردارهای ستونی و $H(t)$ ماتریس $r \times m$ است.
این رابطه را برای تعیین خودبستگی $R_{yy}(t_1,t_2)$ مربوط به $\mathbf{Y}(t)$
به کار خواهیم برد.
با ضرب کردن مزدوج ترانسپوزه (۱۰۰ – ۵) در $\mathbf{X}(t_1)$ و قرار دادن
$t=t_2$ داریم

$$\mathbf{X}(t_1)\mathbf{Y}^h(t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^h(t_2-\alpha)\mathbf{H}^h(\alpha)\,d\alpha$$

بنابراین

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t_1,t_2-\alpha)H^h(\alpha)\,d\alpha \qquad (\text{۵}-\text{۱۰۱})$$

با ضرب کردن طرفین رابطهٔ (۱۰۰ – ۵) در $\mathbf{Y}^h(t_2)$ و قرار دادن $t=t_1$
می‌توان به نتیجه زیر رسید

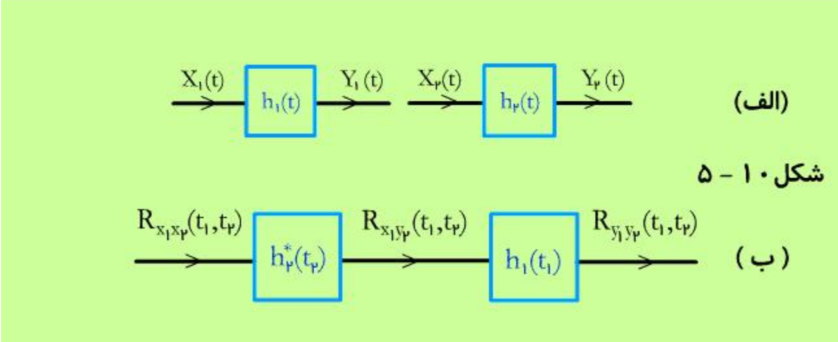
$$R_{yy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha)R_{xy}(t_1-\alpha,t_2)\,d\alpha \qquad (\text{۵}-\text{۱۰۲})$$

این نتایج را می‌توان برای بیان هم بستگی خروجی‌های چند سیستم
عددی بر حسب هم بستگی ورودی‌های آنها به کار برد.
مثال بعدی این کاربرد را نشان می‌دهد.

مثال ۱۷ – ۵

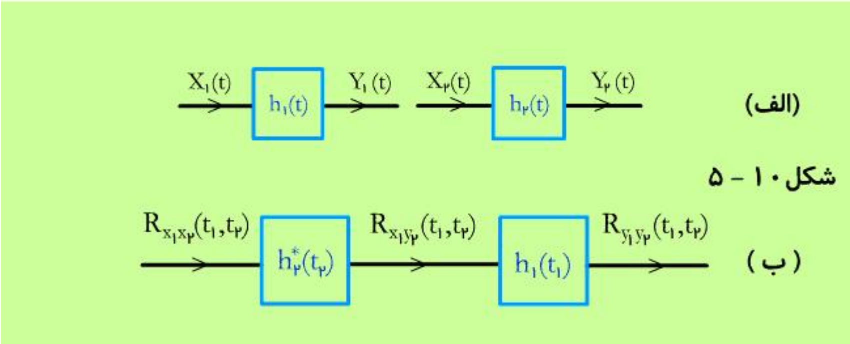
در شکل (۱۰ – ۵) دو سیستم با ورودی‌های $X_1(t), X_2(t)$ و خروجی‌های

$$Y_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)\,X_1(t-\alpha)\,d\alpha\,,\quad Y_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\alpha)\,X_2(t-\alpha)\,d\alpha$$



این سیگنال‌ها را می‌توان به عنوان مؤلفه‌های بردار خروجی $\mathbf{Y}^t(t)=[Y_1(t)\,,\,Y_2(t)]$ سیستم ۲*۲ با بردار ورودی $\mathbf{X}^t(t)=[X_1(t),X_2(t)]$ و ماتریس پاسخ ضربهٔ زیر را در نظر گرفت

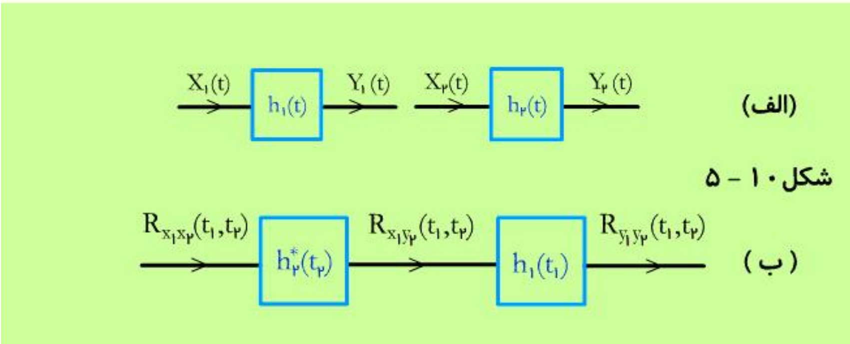
$$H(t)=\begin{bmatrix} h_1(t) & 0 \\ 0 & h_2(t) \end{bmatrix}$$



با قرار دادن در (۱۰۱ – ۵), (۱۰۲ – ۵) داریم

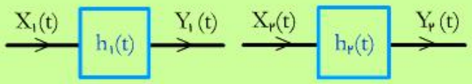
$$R_{x_1y_2}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{x_1x_2}(t_1,t_2-\alpha)\,h_2^*(\alpha)\,d\alpha \qquad (۵ – ۱۰۳)$$

$$R_{y_1y_2}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\alpha)\,R_{x_1y_2}(t_1-\alpha,t_2)\,d\alpha \qquad (۵ – ۱۰۴)$$



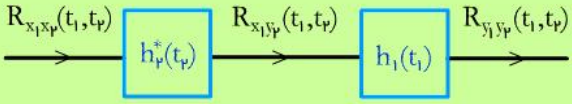
بنابراین ، به منظور تعیین $R_{x_1 y_2}(t_1, t_2)$ ، از $R_{x_1 x_2}(t_1, t_2)$ به عنوان ورودی به مزدوج $[h_2^*(t)]h_2(t)$ که روی متغیر t_2 عمل می‌کند، استفاده می‌کنیم. برای تعیین $R_{y_1 y_2}(t_1, t_2)$ ، از $R_{x_1 y_2}(t_1, t_2)$ به عنوان ورودی به $h_1(t)$ که روی متغیر t_1 عمل می‌نماید، استفاده می‌کنیم (شکل ۱۰ – ۵)

(الف)



شکل ۱۰ – ۵

(ب)



مثال ۱۸ – ۵

مشتق‌های

$$Y_1(t) = Z^{(m)}(t)\ ,\ Y_2(t) = W^{(n)}(t)$$

دو فرآیند $Z(t)\ ,W(t)$ را می‌توان به صورت پاسخ‌های دو مشتق‌گیر با ورودی‌های

$$X_1(t) = Z(t)\ ,X_2(t) = W(t)$$

در نظر گرفت با استفاده از رابطهٔ (۱۰۳ – ۵) به طرز مناسب ، نتیجه می‌گیریم که

$$E\{Z^{(m)}(t_1)\,W^{(n)}(t_2)\} = \frac{\partial^{m+n} R_{zw}(t_1, t_2)}{\partial t_1^m\,\partial t_2^n} \qquad (۵ - ۱۰۵)$$

۵-۳ طیف توان

در نظریهٔ سیگنال ، طیف‌ها مترادف با تبدیلات فوریه است .
در مورد سیگنال های یقینی ، این تبدیلات به منظور توصیف سیگنال به صورت تابعی از جمع آثار توابع نمایی به کار می‌رود. برای سیگنال های تصادفی ، مفهوم طیف دارای دو تعبیر است .
تعبیر اول شامل تبدیلات متوسط می‌باشد که بنابراین ضرورتاً یقینی است .
تعبیر دوم منجر به توصیف فرآیند مورد بحث به صورت جمع آثار توابع نمایی با ضرایب تصادفی می‌شود .
در این بخش، تعبیر اول و درفصول آتی تعبیردوم مورد بررسی قرار می‌گیرد .
فقط فرآیندهای ایستان را مورد بحث قرار داده و یادآور می‌شود که برای فرآیندهای غیر ایستان ، مفهوم طیف اهمیّت محدودی دارد .

تعاریف :

طیف توان (یا چگالی طیفی) فرآیند $X(t)$ که WSS حقیقی یا مختلط است، تبدیل فوریه $[S(\omega)]$ تابع خودبستگی $R(\tau)=E\{X(t+\tau)X^*(t)\}$ آن است.

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \qquad (۵\text{-}۱۰۶)$$

چون $R(-\tau)=R^*(\tau)$ است پس $S(\omega)$ تابعی حقیقی از ω است.
با استناد به رابطهٔ تبدیل فوریه می‌توان گفت

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \qquad (۵\text{-}۱۰۷)$$

اگر $X(t)$ فرآیند حقیقی باشد، آن گاه $R(\tau)$ حقیقی و زوج است. بنابراین $S(\omega)$ نیز حقیقی و زوج است. در این حالت داریم:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$$
$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega \qquad (۵\text{-}۱۰۸)$$

طیف توان متقابل دو فرآیند $X(t)$ و $Y(t)$ تبدیل فوریه $[S_{xy}(\omega)]$ تابع هم بستگی (متقابل) $R_{xy}(\tau)=E\{X(t+\tau)Y^*(t)\}$ آنها است.

$$S_{xy}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \quad , \quad R_{xy}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

تابع $S_{xy}(\omega)$ ، به طور کلی مختلط است حتی در مواردی که فرآیندهای $X(t)$ و $Y(t)$ حقیقی هستند. در همهٔ حالات $S_{xy}(\omega)=S^*_{yx}(\omega)$ چون $R_{xy}(-\tau)=E\{X(t-\tau)Y^*(t)\}=R^*_{yx}(\tau)$ می‌باشد .

در جدول ۱-۵ تعدادی توابع خود بستگی و طیف توان آنها که
اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرند، فهرست شده اند ،
توجه کنید که در تمام حالات، $S(\omega)$ مثبت است .
به زودی نشان خواهیم داد که این خاصیت برای هر طیفی صحّت دارد .

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega \leftrightarrow S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$\delta(\tau)\leftrightarrow 1 \qquad 1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\beta\tau}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\beta) \qquad \cos\beta\tau\leftrightarrow \pi\delta(\omega-\beta)+\pi\delta(\omega+\beta)$$

$$e^{-\alpha|\tau|}\leftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \qquad e^{-\alpha\tau^2}\leftrightarrow\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$$

$$e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau\leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega-\beta)^2}+\frac{\alpha}{\alpha^2+(\omega+\beta)^2}$$

$$2e^{-\alpha\tau^2}\cos\beta\tau\leftrightarrow\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[e^{-(\omega-\beta)^2/4\alpha}+e^{-(\omega+\beta)^2/4\alpha}\right]$$

$$\begin{cases}1-\frac{|\tau|}{T} & |\tau|<T\\ 0 & |\tau|>T\end{cases}\leftrightarrow\frac{4\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}$$

$$\frac{\sin\sigma\tau}{\pi\tau}\leftrightarrow\begin{cases}1 & |\omega|<\sigma\\ 0 & |\omega|>\sigma\end{cases}$$

مثال ۱۹-۵

سیگنال تلگراف تصادفی فرآیند $X(t)$ است که مقادیر ۱+ و ۱- را مشابه
مثال ۳-۵ اختیار می‌کند.

$$X(t)=\begin{cases}1 & t_{2i}<t<t_{2i+1}\\ -1 & t_{2i-1}<t<t_{2i}\end{cases}$$

که در این رابطه t_i مجموعه ای از نقاط پواسون با چگالی متوسط λ است.
همان طور که نشان داده شد خود بستگی آن برابر $e^{-2\lambda|\tau|}$ است.
در نتیجه داریم

$$S(\omega)=\frac{4\lambda}{4\lambda^2+\omega^2}$$

در اغلب فرآیندها، $R(\tau)\to\eta^2$ میل می‌کند که در آن $\eta=E\{X(t)\}$ است.
بنابراین اگر $\eta\neq 0$ باشد
در آن صورت $S(\omega)$ شامل ضربه ای در $\omega=0$ خواهد بود.
برای حذف آن، غالباً مناسب است که خواص طیفی $X(t)$ برحسب تبدیل
فوریهٔ $S^c(\omega)$ مربوط به تابع کوواریانس $C(\tau)$ بیان شود.
از آنجا که $R(\tau)=C(\tau)+\eta^2$ است می‌توان گفت

$$S(\omega)=S^c(\omega)+2\pi\,\eta^2\delta(\omega) \qquad (5\text{-}109)$$

تابع $S^c(\omega)$ را طیف کوواریانس $X(t)$ نامند.

مثال ۲۰-۵

نشان دادیم که تابع خودبستگی ضربه‌های پواسون

$$Z(t)=\frac{d}{dt}\sum_i U(t-t_i)=\sum_i \delta(t-t_i)$$

برابر $R_z(\tau)=\lambda^2+\lambda\,\delta(\tau)$ می‌باشد. با توجه به آن داریم

$$S_z(\omega)=\lambda+2\pi\lambda^2\,\delta(\omega)\quad,\qquad S_z^c(\omega)=\lambda$$

اکنون نشان می‌دهیم که برای هر تابع مثبت دلخواه $S(\omega)$ مفروض،
می‌توان فرآیند $X(t)$ با طیف توان $S(\omega)$ را به دست آورد.

الف) فرآیند زیر را در نظر بگیرید :

$X(t)=ae^{j(\omega t-\varphi)}$ که در آن a ثابت حقیقی، ω متغیر تصادفی با چگالی
$f_w(\omega)$ و φ متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت در بازهٔ $(0, 2\pi)$ است.

همان طور که می‌دانیم این فرآیند WSS با متوسط صفر و خودبستگی زیر است

$$R_x(\tau)=a^2E\{e^{j\omega\tau}\}=a^2\int_{-\infty}^{\infty}f_w(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

با توجه به این رابطه و خاصیت یکتا بودن تبدیل فوریه می‌توان نتیجه گرفت
که طیف توان $X(t)$ عبارت است از

$$S_x(\omega)=2\pi a^2 f_w(\omega)\qquad(5\text{-}110)$$

بنابراین اگر

$$f_w(\omega)=\frac{S(\omega)}{2\pi a^2}\quad,\qquad a^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega=R(0)$$

باشد، آن گاه $f_w(\omega)$ چگالی و $S_x(\omega)=S(\omega)$ خواهد بود.

برای کامل نمودن مشخصات فرآیند $X(t)$ کافی است که متغیر تصادفی ω با
چگالی $\frac{S(\omega)}{2\pi a^2}$ را تشکیل و آن را در فرآیند $X(t)=ae^{j(\omega t-\varphi)}$ قرار دهیم.

ب) نشان می‌دهیم که اگر $S(-\omega)=S(\omega)$ باشد آن گاه فرآیند حقیقی با طیف توان $S(\omega)$ خواهیم داشت. به این منظور فرآیند $Y(t)=a\cos(\omega t+\varphi)$ را تشکیل می‌دهیم.

در این حالت داریم

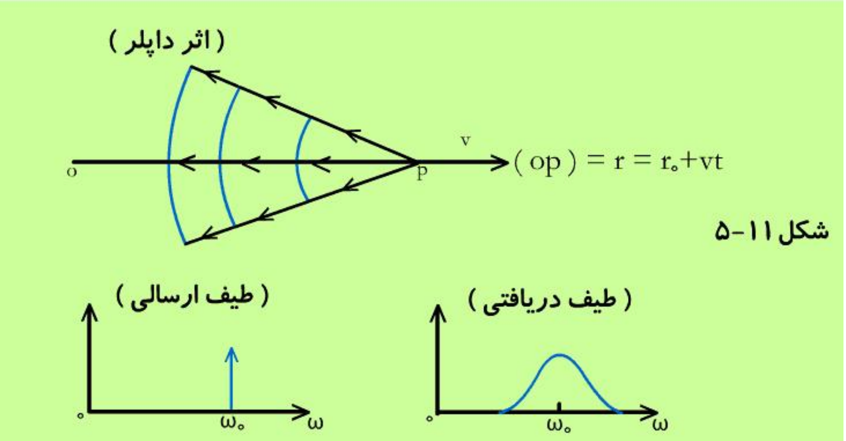
$$R_y(\tau)=\frac{a^۲}{۲}E\{\cos\omega\tau\}=\frac{a^۲}{۲}\int_{-\infty}^{\infty}f_w(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که اگر $f_w(\omega)=\frac{S(\omega)}{\pi a^۲}$ باشد آن گاه $S_y(\omega)=S(\omega)$ خواهد بود.

مثال ۲۱-۵

[اثر داپلر (Doppler)]

نوسانساز هارمونیکی در نقطهٔ P از محور x قرار دارد. (شکل ۱۱-۵)



شکل ۱۱-۵

این نوسانساز روی محور x با سرعت v حرکت می‌کند. سیگنال ساطع شده برابر $e^{j\omega_0 t}$ بوده و سیگنال دریافتی توسط ناظر در نقطهٔ o عبارت است از

$$S(t)=ae^{j\omega_0(t-r/c)}$$

که در آن c سرعت انتشار و $r=r_0+vt$ است. فرض می‌کنیم که V متغیر تصادفی با چگالی $f_v(v)$ باشد. واضح است که

بنابراین طیف سیگنال دریافتی بر اساس رابطهٔ (۱۱۰-۵) برابر است با

$$S(\omega)=۲\pi a^۲f_w(\omega)=\frac{۲\pi a^۲c}{\omega_0}f_v\left[\left(۱-\frac{\omega}{\omega_0}\right)c\right] \qquad (۵\text{-}۱۱۱)$$

توجه داریم که اگر $v=0$ باشد آن گاه

$$S(t)=ae^{j(\omega t_0-\varphi)}\;,\quad R(\tau)=a^2e^{j\omega_0\tau}\;,\quad S(\omega)=2\pi a^2\delta(\omega-\omega_0)$$

بنابراین متوجه می‌شویم که حرکت سبب گسترده شدن طیف توان می‌گردد.
نتایج فوق برای حالتی که امتداد حرکت با محور x زاویه ای داشته باشد نیز صادق است، مشروط بر آنکه به جای V تصویر آن روی op یعنی V_x را قرار دهیم.

فرض کنید که انتشار (حرکت) یک ذره در محیط گازی با دمای T مدنظر است. در این مورد، مؤلفه x سرعت آن یک متغیر تصادفی نرمال با متوسط صفر و واریانس kT/m است.

با قرار دادن در رابطهٔ (۱۱۱-۵) نتیجه می‌گیریم که

$$S(\omega)=\frac{2\pi a^2 c}{\omega_0\sqrt{2\pi kT/m}}\exp\left\{-\frac{mc^2}{2kT}\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}$$

$$R(\tau)=a^2\exp\left\{-\frac{kT\omega_0^2\tau^2}{2mc^2}\right\}e^{j\omega_0\tau}$$

طیف‌های خطی

الف) در مثال ۴-۵ نشان دادیم که فرآیند

$$X(t)=\sum_i c_i e^{j\omega_i t}$$

فرآیندی WSS است مشروط بر آنکه متغیرهای تصادفی c_i ناهم‌بسته با متوسط صفر باشند. بر اساس این مفهوم و جدول ۱-۵ می‌توان گفت که

$$R(\tau)=\sum_i \sigma_i^2 e^{j\omega_i \tau} \qquad S(\omega)=2\pi\sum_i \sigma_i^2 \delta(\omega-\omega_i)$$

که در آن $\sigma_i^2=E\{c_i^2\}$ می‌باشد.

در فصول آتی نشان خواهیم داد که چنین فرآیندی قابل پیش بینی است، یعنی مقدار فعلی آن به طور یکتا بر اساس مقدار گذشته آن قابل تعیین است.

ب) مشابهاً فرآیند

$$Y(t)=\sum_i (a_i\cos\omega_i t+b_i\sin\omega_i t)$$

WSS است اگر متغیرهای تصادفی a_i و b_i ناهم‌بسته با میانگین صفر و $E\{a_i^2\}=E\{b_i^2\}=\sigma_i^2$ باشند. در این حالت داریم

$$R(\tau)=\sum_i \sigma_i^2 \cos\omega\tau \ , \ S(\omega)=\pi\sum_i \sigma_i^2 [\delta(\omega-\omega_i)+\delta(\omega-\omega_i)]$$

سیستم‌های خطی

تابع خودبستگی $R_{yy}(\tau)$ و طیف توان $S_{yy}(\omega)$ مربوط به پاسخ

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\alpha)\, h(\alpha)\, d\alpha \qquad (5\text{-}112)$$

سیستم خطی را می‌توان بر حسب تابع خود بستگی $R_{xx}(\tau)$ و طیف توان $S_{xx}(\omega)$ ورودی $X(t)$ بیان کرد.

قضیه :

$$R_{xy}(\tau)=R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau)\ ,\ R_{yy}(\tau)=R_{xy}(\tau) * h(\tau) \qquad (۵-۱۱۳)$$

$$S_{xy}(\omega)=S_{xx}(\omega)\, H^*(\omega)\ ,\ S_{yy}(\omega)=S_{xy}(\omega)\, H(\omega) \qquad (۵-۱۱۴)$$

برای اثبات می‌توان ادعا کرد

که دو معادلهٔ (۱۱۳-۵) حالات خاصی از روابط (۷۸-۵) هستند.

به هرحال، به علت اهمیت آنها، مستقیماً این روابط را اثبات می‌کنیم.

با ضرب $X(t+\tau)$ در مزدوج (۱۱۲-۵) و گرفتن امید ریاضی داریم

$$E\{X(t+\tau)Y^*(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t+\tau)X^*(t-\alpha)\}h^*(\alpha)\, d\alpha$$

از آنجا که $E\{X(t+\tau)X^*(t-\alpha)\}=R_{xx}(\tau+\alpha)$ است داریم

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau+\alpha)h^*(\alpha)\, d\alpha =\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau-\beta)h^*(-\beta)\, d\beta$$

به روش مشابه عمل کرده و

$$E\{Y(t)Y^*(t-\tau)\}=\int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t-\alpha)Y^*(t-\tau)\}h(\alpha)\, d\alpha$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau-\alpha)h(\alpha)\, d\alpha$$

معادلهٔ (۱۱۴-۵) نیز با استناد به (۱۱۳-۵) و قضیهٔ کانوولوشن به سهولت به دست می‌آید.

از ترکیب دو معادلهٔ (۱۱۳-۵) و(۱۱۴-۵) داریم

$$R_{yy}(\tau)=R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)=R_{xx}(\tau) * \rho(\tau) \qquad (۵-۱۱۵)$$

$$S_{yy}(\omega)=S_{xx}(\omega)H(\omega)H^*(\omega)=S_{xx}(\omega)\,|H(\omega)|^۲ \qquad (۵-۱۱۶)$$

که‌در آن

$$\rho(\tau)=h(\tau) * h^*(-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau)h^*(t)\, dt \longleftrightarrow |H(\omega)|^۲ \qquad (۵-۱۱۷)$$

به خصوص توجه کنید که اگر $X(t)$ نویز سفید با توان متوسط q باشد، در آن صورت

$$R_{xx}(\tau)=q\,\delta(\tau) \quad , \quad S_{xx}(\omega)=q$$
$$S_{yy}(\omega)=q|H(\omega)|^{۲} \quad , \quad R_{yy}(\tau)=q\,\rho(\tau)$$

با توجه به رابطهٔ (۱۱۶-۵) و فرمول معکوس (۱۰۷-۵) می‌توان گفت

$$E\{|Y(t)|^{۲}\}=R_{yy}(۰)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)|H(\omega)|^{۲}d\omega \geq ۰$$

این معادله خواص فیلتر کردن سیستم را در حالتی که ورودی آن فرآیند تصادفی است، نشان می‌دهد.

برای مثال نشان می‌دهد که اگر برای $|\omega| > \omega_۰$ ، $H(\omega)=۰$ بوده و به ازاء $|\omega| < \omega$ ، $S_{xx}(\omega)=۰$ باشد در آن صورت $E\{Y^{۲}(t)\}=۰$ خواهد بود

مثال ۲۲-۵

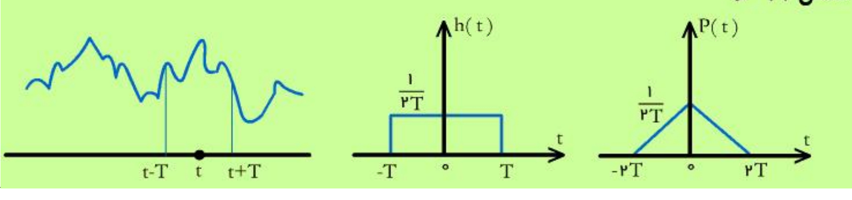
الف) [متوسط متحرک] (Moving Average) انتگرال

$$Y(t)=\frac{۱}{۲T}\int_{t-T}^{t+T} x(\alpha)\,d\alpha$$

متوسط فرآیند $X(t)$ در بازه $(t-T, t+T)$ است.

بنابراین $Y(t)$ خروجی سیستمی با ورودی $X(t)$ و پاسخ ضربه پالس چهار گوش مطابق (شکل ۱۲-۵) می‌باشد.

شکل ۱۲-۵



$\rho(t)$ مربوطه به شکل مثلث بوده و در این حالت

$$S_{yy}(\omega)=S_{xx}(\omega)\ \frac{\sin^2 T\omega}{T^2\omega^2}$$

,

$$H(\omega)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-j\omega\tau}\,d\tau=\frac{\sin T\omega}{T\omega}$$

بنابراین $H(\omega)$ فقط در بازه ای از مرتبه $\frac{1}{T}$ حول مبدأ، مقادیر قابل ملاحظه ای را اختیار می‌کند.پس متوسط متحرک مؤلفه‌های فرکانس بالای ورودی را حذف کرده و می‌توان‌آن را یک فیلتر پایین گذر نامید.

با توجه به اینکه $\rho(\tau)$ یک مثلث است

با استناد به رابطهٔ (۵-۱۱۵) نتیجه می‌شود

$$R_{yy}(\tau)=\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\alpha|}{2T}\right)R_{xx}(\tau-\alpha)\,d\alpha \qquad (۵\text{-}۱۱۸)$$

برای تعیین واریانس انتگرال

$$\eta_T=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,dt$$

از نتیجه فوق استفاده می‌کنیم. بدیهی است که $\eta_T=Y(0)$ است پس

$$\mathrm{Var}\{\eta_T\}=C_{yy}(0)=\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\alpha|}{2T}\right)C_{xx}(\alpha)\,d\alpha \qquad (۵\text{-}۱۱۹)$$

ب) [فیلتر بالا گذر]

فرآیند $Z(t)=X(t)-Y(t)$ خروجی سیستمی با ورودی $X(t)$ و تابع سیستم

$$H(\omega)=1-\frac{\sin T\omega}{T\omega}$$

است. این تابع در بازه ای از مرتبهٔ $\frac{1}{T}$ حول مبدأ تقریباً صفر بوده و به ازاء ω بزرگ به یک میل می‌کند

بنابراین، سیستم مذکور به صورت فیلتر بالا گذری که فرکانس‌های پایین ورودی را حذف می‌کند، عمل می‌نماید.

مثال ۲۳-۵

مشتق $X'(t)$ فرآیند $X(t)$ را می‌توان به عنوان خروجی یک سیستم خطی با ورودی $X(t)$ و تابع سیستم $j\omega$ در نظر گرفت.

پس با توجه به این نگرش و رابطهٔ (۱۱۴-۵) می‌توان گفت

$$S_{xx'}(\omega)=-j\omega\, S_{xx}(\omega) \quad , \quad S_{x'x'}(\omega)=\omega^2 S_{xx}(\omega)$$

بنابراین

$$R_{xx'}(\tau)=-\frac{d\,R_{xx}(\tau)}{d\tau} \quad , \quad R_{x'x'}(\tau)=-\frac{d^2R_{xx}(\tau)}{d\tau^2}$$

مشتق n ام $X(t)$ یعنی $Y(t)=X^{n}(t)$ خروجی سیستمی با ورودی $X(t)$ و تابع سیستم $(j\omega)^n$ است.

$$S_{yy}(\omega)=|j\omega|^{2n} \quad , \quad R_{yy}(\tau)=(-1)^n R^{(2n)}(\tau) \qquad (۵-۱۲۰)$$

مثال ۲۴-۵

(الف)

معادلهٔ دیفرانسیل $Y'(t)+cY(t)=X(t)$ به ازاء تمام مقادیر t ، سیستمی خطی را توصیف می‌کند که ورودی آن $X(t)$ ، خروجی آن $Y(t)$ و تابع سیستم آن $\frac{1}{j\omega+c}$ است.

فرض کنید که $X(t)$ نویز سفید با $R_{xx}(\tau)=q\,\delta(\tau)$ می‌باشد.

با استناد به (۱۱۶-۵) می‌توان نوشت

$$S_{yy}(\omega)=\frac{S_{xx}(\omega)}{\omega^{2}+c^{2}}=\frac{q}{\omega^{2}+c^{2}} \quad , \quad R_{yy}(\tau)=\frac{q}{2c}e^{-c|\tau|}$$

خواص تابع هم بستگی

اگر تابع $R(\tau)$ تابع خودبستگی فرآیند WSS، $X(t)$ باشد، آن گاه تبدیل فوریه آن $S(\omega)$ مثبت است.

علاوه بر این، اگر $R(\tau)$ تابعی با تبدیل فوریه مثبت باشد می‌توان فرآیند $X(t)$ را با تابع خودبستگی $R(\tau)$ به دست آورد.

پس، شرط لازم و کافی برای اینکه تابع $R(\tau)$ تابع خودبستگی باشد، مثبت بودن تبدیل فوریهٔ آن است.

شرایط خودبستگی بودن تابع $R(\tau)$ را می‌توان مستقیماً برحسب $R(\tau)$ بیان کرد. قبلاً نشان دادیم که تابع خودبستگی $R(\tau)$ مربوط به فرآیند $X(t)$، مثبت معین است.

یعنی به ازاء جمیع مقادیر a_i، a_j، τ_i,τ_j :

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* R(\tau_i - \tau_j) \geq 0 \qquad (۵-۱۲۵)$$

می‌توان نشان داد که عکس آن نیز صحت دارد.

اگر $R(\tau)$ تابعی مثبت معین باشد، آن‌گاه تبدیل فوریهٔ آن مثبت است.

در نتیجه تابع $R(\tau)$ دارای تبدیل فوریه مثبت است اگر و فقط اگر مثبت معین باشد.

برای تعیین این‌که آیا $R(\tau)$ مثبت معین است باید نشان دهیم که این تابع در رابطهٔ (۱۲۵-۵) صدق می‌کند یا تبدیل فوریه آن مثبت است.

درحالت کلی بررسی این شرط کار ساده ای نیست.

در سطور زیرین شرط ساده و کافی را برای این امر معرفی می‌کنیم.

معیار پولیا (Polya)

می‌توان نشان داد که تابع $R(\tau)$ یک تابع مثبت معین خواهد بود مشروط بر آن که به ازاء $\tau > 0$ تابعی مقعر و به ازاء $\tau \to \infty$ به یک حد محدود میل کند.

برای مثال تابع $W(\tau) = e^{-\alpha|\tau|^c}$ را در نظر بگیرید. اگر $0 < c < 1$ باشد، در آن صورت برای $\tau \to \infty$ تابع $W(\tau)$ به صفر میل کرده و به ازاء $\tau > 0$ ، $W''(\tau) > 0$ است. بنابراین $W(\tau)$ مثبت معین است، چون شرط پولیا را اقناع می‌کند.

توجه کنید که این تابع به ازاء $1 \leq c \leq 2$ نیز مثبت معین است هر چند در شرط پولیا صدق نمی کند.

یکی از شرایط لازم برای تابع خودبستگی عبارت است از این‌که ،

تابع خودبستگی $R(\tau)$ مربوط به هر فرآیند مانند $X(t)$ در مبدأ حداکثر باشد چون

$$\left|R(\tau)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega = R(0) \qquad (5\text{-}126)$$

قضیه

اگر به ازاء مقداری مانند $\tau_1 \neq 0$ $R(\tau_1)=R(0)$ باشد، آن گاه $R(\tau)$ متناوب با تناوب τ_1 است. یعنی

$$R(\tau + \tau_1)=R(\tau) \quad \text{به ازاء جمیع مقادیر } \tau \qquad (5\text{-}127)$$

برای اثبات، از نامساوی شوارتز استفاده می‌کنیم.

$$E^2(ZW) \le E(Z^2)\, E(W^2)$$

با فرض

$$W=X(t) \text{ و } Z=X(t+\tau+\tau_1)-X(t+\tau)$$

می‌توان گفت

$$E^2\{[X(t+\tau+\tau_1)-X(t+\tau)]X(t)\}\le E\{[X(t+\tau+\tau_1)-X(t+\tau)]^2\}E\{X^2(t)\} \quad (۵-۱۲۸)$$

بنابراین

$$[R(\tau+\tau_1)-R(\tau)]^2\le 2[R(0)-R(\tau_1)]R(0)$$

اگر $R(\tau_1)=R(0)$ باشد در آن صورت طرف راست رابطهٔ فوق به ازاء جمیع مقادیر τ صفر بوده و رابطهٔ (۵-۱۲۷) حاصل می‌شود.

خاصیت دیگری که باید به آن اشاره کرد بدین صورت است.

اگر $R(\tau_1)=R(\tau_2)=R(0)$ بوده و اعداد τ_2 ، τ_1 مضرب هم نباشند یعنی نسبت آنها گویا نباشد، آن گاه $R(\tau)$ مقداری ثابت است.

چون با توجه به قضیهٔ فوق باید نتیجه گرفت که

$R(\tau)$ با تناوب τ_1 متناوب است و از طرف دیگر با تناوب τ_2 نیز متناوب است و این امر فقط هنگامی امکان دارد که $R(\tau)$ ثابت باشد.

بر اساس خاصیت پیوستگی می‌توان گفت اگر $R(\tau)$ در مبدأ پیوسته باشد به ازاء هر مقدار τ پیوسته است. چون از پیوستگی $R(\tau)$ در $\tau=0$ می‌توان نتیجه گرفت که $R(\tau_1)\to R(0)$ میل می‌کند.

بنابراین طرف چپ رابطهٔ (۵-۱۲۸) نیز به ازاء هر مقدار τ با $\tau_1\to 0$ به صفر میل خواهد کرد.

مثال ۲۶-۵

با استناد به قضیهٔ مطرح شده، می‌توان نشان داد که سهمی بریده شده

$$W(\tau)=\begin{cases} a^2-\tau^2 & , \quad |\tau|<a \\ 0 & , \quad |\tau|>a \end{cases}$$

$W(\tau)$ تابع خود بستگی نیست.

اگر $W(\tau)$ تابع خودبستگی فرآیندی مانند $X(t)$ باشد در آن صورت تابع

$$-W''(\tau)=\begin{cases} 2 & , \quad |\tau|<a \\ 0 & , \quad |\tau|>a \end{cases}$$

تابع خودبستگی $X'(t)$ خواهد بود(رابطهٔ ۱۲۰-۵).

این امر غیرممکن است چون $-W''(\tau)$ به ازاء $\tau=0$ پیوسته است ولی به ازاء $\tau=a$ پیوسته نیست.

پیوستگی و تناوب متوسط مربع (MS)

فرآیند $X(t)$ را هنگامی پیوستهٔ (MS) می‌نامند که

$$E\{[X(t+\varepsilon)-X(t)]^2\} \longrightarrow 0 \quad , \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \qquad (۵-۱۲۹)$$

چون

$$E\{[X(t+\varepsilon)-X(t)]^2\}=2[R(0)-R(\varepsilon)]$$

بوده و نتیجه می‌گیریم که اگر $X(t)$ پیوستهٔ (MS) است
در آن صورت به ازاء $\varepsilon \longrightarrow 0$ ، $[R(0)-R(\varepsilon)] \longrightarrow 0$ میل می کند.
بنابراین فرآیند WSS ، $X(t)$ پیوسته (MS) خواهد بود اگر و فقط اگر
تابع خودبستگی آن $R(\tau)$ به ازاء جمیع مقادیر τ پیوسته باشد.

فرآیند $X(t)$ را هنگامی متناوب (MS) با تناوب τ_1 می‌نامیم که

$$E\{[X(t+\tau_1)-X(t)]^2\}=0 \qquad (۵-۱۳۰)$$

چون طرف چپ رابطهٔ فوق با $2[R(0)-R(\tau_1)]$ برابر بوده و
نتیجه می‌گیریم که $R(\tau_1)=R(0)$ است،
پس با توجه به رابطهٔ (۵-۱۲۷) ، $R(\tau)$ متناوب است.
بنابراین فرآیند WSS ، $X(t)$ متناوب (MS) خواهد بود اگر و فقط اگر
تابع خودبستگی‌آن متناوب باشد.
اکنون با استفاده از نامساوی شوارتز نشان می‌دهیم که تابع هم بستگی
$R_{xy}(\tau)$ دو فرآیند WSS ، $X(t)$ و $Y(t)$ در نامساوی زیر صدق می‌کنند

$$R_{xy}^2(\tau) \le R_{xx}(0)R_{yy}(0) \qquad (۵-۱۳۱)$$

با استناد به نامساوی شوارتز می‌توان نوشت

$$E^2\{X(t+\tau)\text{-}Y^*(t)\} \le E\{|X(t+\tau)|^2\}E\{|Y(t)|^2\}=R_{xx}(0)R_{yy}(0)$$

که رابطهٔ (۵-۱۳۱) بدست می‌آید.
همچنین نشان می‌دهیم که به ازاء هر مقدار a و b

$$\left|\int_a^b S_{xy}(\omega)\,d\omega\right|^2 \le \int_a^b S_{xx}(\omega)\,d\omega \int_a^b S_{yy}(\omega)\,d\omega \qquad (۵-۱۳۲)$$

فرض کنید که $X(t)$ و $Y(t)$ ورودی فیلترهای ایده آل زیر هستند

$$H_1(\omega)=H_2(\omega)=\begin{cases} 1 & , \quad a<\omega<b \\ 0 & , \quad \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

اگر خروجی فیلترها را به ترتیب با $Z(t)$ و $W(t)$ نشان دهیم،
می‌توان نتیجه گرفت که

$$R_{zz}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b S_{xx}(\omega)d\omega \quad R_{ww}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b S_{yy}(\omega)d\omega$$

$$R_{zw}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b S_{zw}(\omega)d\omega$$

و با توجه به رابطه

$$R_{zw}^2(0) \le R_{zz}^2(0)R_{ww}^2(0)$$

رابطهٔ (۱۳۲-۵) اثبات می‌شود.

۵-۴ فرآیندهای گسسته زمان

فرآیند دیجیتال(یا گسسته زمان) دنباله X_n از متغیرهای تصادفی است.
به منظور پرهیز از اندیس های دوگانه، نماد $X[n]$ را نیز به کار می‌بریم
که در این نماد از کروشه استفاده شده تا نشان دهیم که n عدد صحیح است.
اکثر نتایج به دست آمده برای فرآیند آنالوگ (یا پیوسته زمان) به سهولت
قابل تعمیم به فرآیندهای دیجیتال است.
مفاهیم اساسی را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.
تابع خودبستگی و کوواریانس $X[n]$ توسط روابط زیر بیان می‌شوند.

$$R[n_1,n_2]=E\{X[n_1]\}X^*[n_2] \quad , \quad C[n_1,n_2]=R[n_1,n_2]-\eta[n_1]\eta^*[n_2] \qquad (۵-۱۳۳)$$

که $\eta[n]=E\{X[n]\}$ تابع متوسط $X[n]$ است.

فرآیند $X(n)$ هنگامی SSS است که خواص آماری آن تغییر ناپذیر با
جابه‌جایی مبدأ باشد.
این فرآیند هنگامی WSS است که، ثابت $=\eta=\eta[n]$ بوده و

$$R[n+m,n]=E\{X[n+m]X^*[n]\}=R[m] \qquad (۵-۱۳۴)$$

باشد.
فرآیند $X(n)$ زمانی نویز سفید اکید است که متغیرهای تصادفی
$X[n_i]$ مستقل از یکدیگر باشند.
این فرآیند هنگامی نویز سفید است که متغیرهای تصادفی $X[n_i]$
ناهم‌بسته باشند.
خودبستگی فرآیند نویز سفید با متوسط صفر عبارت است از

$$R[n_1,n_2]=q[n_1]\delta[n_1-n_2] \quad \text{که} \quad \delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \qquad (۵-۱۳۵)$$

و $q[n]=E\{X[n]^2\}$ است.
اگر $X[n]$ نیز ایستان باشد در آن صورت $R[m]=q\delta[m]$ خواهد بود.
بنابراین نویز سفید WSS دنباله ای از متغیرهای تصادفی i.i.d.
(مستقل با توزیع یکسان) با واریانس q است.
پاسخ ضربه یک سیستم خطی یعنی $h(n)$ در واقع پاسخ آن به دنبالهٔ
$\delta(n)$ می‌باشد. تابع سیستم آن تبدیل z $h(n)$ خواهد بود.

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

اگر $X[n]$ ورودی سیستم دیجیتال باشد، خروجی حاصله کانوولوشن دیجیتالی (گسسته) $X[n]$ با $h[n]$ خواهد بود

$$Y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[n-k]h[k]=X[n]*h[n] \qquad (۵-۱۳۶)$$

با توجه به رابطهٔ فوق می‌توان گفت

$$\eta_y[n]=\eta_x[n]*h[n]$$

علاوه بر آن

$$R_{xy}[n_1,n_2]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}[n_1,n_2-k]h^*[k] \qquad (۵-۱۳۷)$$

$$R_{yy}[n_1,n_2]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} R_{xy}[n_1-r,n_2]h[r] \qquad (۵-۱۳۸)$$

اگر $X[n]$ نویز سفید با شدت متوسط $q[n]$ به صورت رابطهٔ (۵-۱۳۵) باشد، آن گاه

$$E\{Y^2[n]\}=q[n]*|h[n]|^2$$

اگر $X[n]$ فرآیند WSS باشد، در آن صورت $Y[n]$ نیز WSS با $\eta_y=\eta_x H(1)$ خواهد بود.

علاوه بر آن

$$R_{xy}[m]=R_{xx}[m]*h^*[-m]\ ,\ R_{yy}[m]=R_{xy}[m]*h[m]$$
$$R_{yy}[m]=R_{xx}[m]*\rho[m]\ ,\ \rho[m]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[m+k]h^*[k]$$

طیف توان

فرآیند WSS، $X[n]$ مفروض است. $S(z)$ تبدیل z تابع خودبستگی آن یعنی $R[m]$ به صورت زیر است

$$S(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m]z^{-m}$$

طیف توان $X[n]$ تابع

$$S(\omega)=S(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{\infty} R[m]e^{-jm\omega}\geq 0$$

خواهد بود.

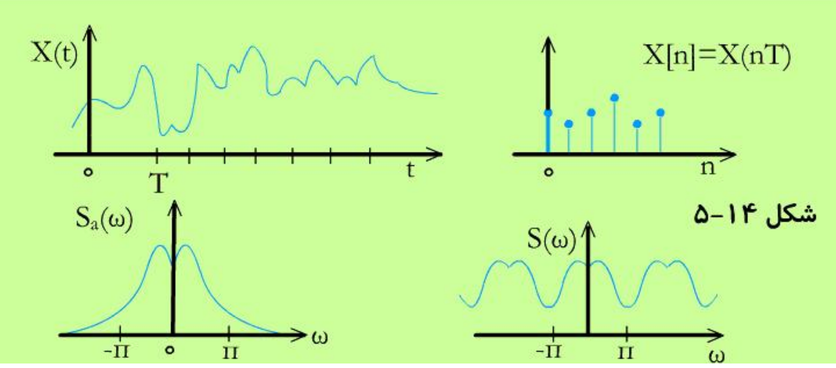
بنابراین $S(e^{j\omega})$ تبدیل فوریهٔ گسسته زمان $R[m]$ می‌باشد.

تابع $S(e^{j\omega})$ متناوب با تناوب 2π و ضرایب سری فوریه برابر با $R[m]$ است

بنابراین

$$R[m]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\omega})e^{jm\omega}\,d\omega$$

پس کافی است که $S(e^{j\omega})$ را فقط برای گسترهٔ $|\omega|<\pi$ تعریف و مشخص کنیم (به شکل ۱۴-۵ مراجعه کنید).



شکل ۱۴-۵

اگر $X[n]$ فرآیند حقیقی باشد، در آن صورت $R[-m]=R[m]$ بوده و داریم

$$S(e^{j\omega})=R[0]+2\sum_{m=0}^{\infty}R[m]\cos m\omega$$

این رابطه نشان می‌دهد که طیف توان یک فرآیند حقیقی تابعی از $\cos\omega$ است چون $\cos m\omega$ تابعی از $\cos\omega$ می‌باشد.

شرط غیرمنفی بودن در رابطهٔ (۱۲۵-۵) را می‌توان برحسب برخی ماتریس های هرمیتی تاپلیتز [Hermitian Toeplitz] مشخص توصیف کرد. فرض کنید

$$r_k \triangleq R[k]$$

و ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{T}_n = \begin{vmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^* & r_0 & r_1 & r_2 \cdots & r_{n-1} \\ r_2^* & r_1^* & r_0 & r_1 \cdots & r_{n-2} \\ \vdots & & & & \\ r_n^* & r_{n-1}^* & \cdots & r_1^* & r_0 \end{vmatrix}$$

در این حالت

$$S(\omega)\geq 0 \iff \mathbf{T}_n \geq 0 \quad , \quad n=0\longrightarrow\infty \qquad (5-139)$$

یعنی ماهیت غیر منفی بودن طیف توان معادل است با غیر منفی بودن هر ماتریس هرمیتی تاپلیتز $\mathbf{T}_n$ ، $n=0\longrightarrow\infty$

به منظور اثبات این نتیجه، ابتدا فرض کنید که $S(\omega) \geq 0$ می‌باشد.

سپس فرض کنید که

$$\alpha=[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]^t \qquad (۵-۱۴۰)$$

می‌توان نوشت

$$a^h \mathbf{T}_n \alpha = \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} a_i^* \, a_m \, r_{i-m}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{m=0}^{n} a_i^* \, a_m \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) e^{j(i-m)\omega} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) \left| \sum_{m=0}^{n} a_m \, e^{-jm\omega} \right|^2 d\omega \geq 0 \qquad (۵-۱۴۱)$$

از آن‌جا که α بردار اختیاری و دلخواه است می‌توان گفت که

$$S(\omega) \geq 0 \Longrightarrow \mathbf{T}_n \geq 0 \quad , \quad n=0 \longrightarrow \infty \qquad (۵-۱۴۲)$$

برعکس فرض کنید که هر $\mathbf{T}_n$ ، $n=0 \longrightarrow \infty$ ماتریس معین غیر منفی است.

علاوه بر این به ازاء هر ρ ، $0 < \rho < 1$ و ω_0 ، $0 < \omega_0 < 2\pi$ ، بردار α را بر اساس رابطهٔ (۱۴۰-۵) تعریف می‌کنیم به طوری‌که

$$a_m = \sqrt{1-\rho^2} \; \rho^m e^{jm\omega_0}$$

در آن صورت $\mathbf{T}_n$ غیر منفی به رابطهٔ زیر منجر می‌شود.

$$0 \leq a^h \mathbf{T}_n a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1-\rho^2) \left| \sum_{m=0}^{n} \rho^m e^{jm(\omega-\omega_0)} \right|^2 S(\omega) \, d\omega$$

و به ازاء $n \longrightarrow \infty$ انتگرال فوق به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\rho^2}{(1-2\rho)\mathrm{Cos}(\omega-\omega_0)+\rho^2} S(\omega) \, d\omega \geq 0$$

طرف چپ رابطهٔ فوق انتگرال پواسون بوده و به ازاء $\rho \to 1-0$ زیر انتگرال تقریباً برای تمام مقادیر ω_0 برابر $S(\omega_0)$ می‌شود.

در نتیجه

$$\mathbf{T}_n \geq 0, \; n=0 \longrightarrow \infty \Rightarrow S(\omega) \geq 0 \qquad (\text{a.e})$$ تقریباً در همه جا

جالب‌تر این که با قید اضافی معروف به معیار پالی - وینر [Paley - Wiener]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln S(\omega) \, d\omega > -\infty \qquad (۵-۱۴۳)$$

هر $\mathbf{T}_k$, $k=\circ\longrightarrow\infty$ باید معین مثبت باشد.
این ویژگی از رابطهٔ (۵-۱۴۱) به دست می‌آید.

در واقع اگر برخی $\mathbf{T}_k$ منفرد [Singular] باشد در آن صورت بردار
غیرصفری مانند α وجود داردکه $\mathbf{T}_k\alpha=\circ$ بوده
و با توجه به رابطهٔ (۵-۱۴۱) داریم

$$\alpha^h \mathbf{T}_k\, \alpha=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega)\left|\sum_{m=\circ}^{k} a_m e^{jm\omega}\right|^{۲} d\omega=\circ$$

از آنجا که $S(\omega)\geq\circ$ (تقریباً در همه جا)
عبارت فوق به نتیجهٔ زیر منجر می‌شود.

$$S(\omega)\left|\sum_{m=\circ}^{k} a_m e^{jm\omega}\right|^{۲}=\circ \quad a.e.$$

و $\sum a_m e^{-jm\omega}\neq\circ$ تقریباً همه جا است، در نتیجه

$$S(\omega)=\circ \quad a.e.$$

و

$$\int_{-\pi}^{\pi} Ln\; S(\omega)\, d\omega=-\infty$$

که این نتیجه در تضاد با رابطهٔ (۵-۱۴۳) است.

بنابراین با توجه به رابطهٔ (۵-۱۴۳)، هر $\mathbf{T}_k$ مثبت می‌باشد یعنی

$$\mathbf{T}_k>\circ \quad و \quad k=\circ\rightarrow\infty \qquad (۵\text{-}۱۴۴)$$

خاصیت انتگرال پذیری به همراه معیار (۵-۱۴۳) سبب می‌گردد که به توان
چگالی طیفی توان را بر حسب تابع بخصوصی با خواص جالب مشخصی تجزیه کرد.
به عبارت دقیق تر، تابع یکتای زیر در $|z|>۱$ تابعی تحلیلی بوده
و تابع معکوس آن نیز همان خاصیت را دارد (تابع حداقل فاز).

$$H(z)=\sum_{k=\circ}^{\infty} h_k z^{-k} \quad , \quad h_\circ>\circ \quad , \quad |z|>۱ \qquad (۵\text{-}۱۴۵)$$

این تابع در شرط

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h_k|^2 < \infty$$

صدق کرده (شرط پایداری) و با طیف توان $S(\omega)$ رابطهٔ زیر را دارد مشروط بر آن که $S(\omega)$ و نیز $\operatorname{Ln} S(\omega)$ توابع انتگرال پذیر باشند.

در اینجا $H(e^{-j\omega})$ به عنوان حد شعاعی بیرونی $H(z)$ روی دایرهٔ واحد تعریف می‌شود یعنی

$$H(e^{-j\omega}) = \lim_{r \to 1+0} H(re^{-j\omega}) \qquad (5\text{-}146)$$

مثال ۲۷-۵

اگر $R[m] = a^{|m|}$ باشد، آن گاه

$$S(z) = \sum_{m=-\infty}^{-1} a^{-m} z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} a^{m} z^{-m} = \frac{az}{1-az} + \frac{z}{z-a}$$

$$= \frac{a^{-1} - a}{(a^{-1}+a) - (z^{-1}+z)}$$

بنابراین

$$S(\omega) = S(e^{j\omega}) = \frac{a^{-1} - a}{a^{-1} + a - 2\cos\omega}$$

مثال ۲۸-۵

مانند مورد آنالوگ می‌توان نشان داد که فرآیند $X[n] = \sum_i C_i \cdot e^{j\omega_i n}$ فرآیند WSS است اگر و فقط اگر ضرایب C_i نا هم بسته با متوسط صفر باشند.

در این حالت

$$R[m] = \sum_i \sigma_i^2 \, e^{j\beta_i |m|}$$

و

$$S(\omega) = 2\pi \sum_i \sigma_i^2 \delta(\omega - \beta_i) \;, \quad |\omega| < \pi$$

که در آن $\sigma_i^2 = E\{C_i^2\}$ و $\omega_i = 2\pi k_i + \beta_i$ و $|\beta_i| < \pi$ است

$Y[n]$ خروجی یک سیستم خطی با ورودی $X[n]$ باشد
با استفاده از روابط هم بستگی خروجی و ورودی سیستم های خطی
و نیز خاصیت کانوولوشن، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$S_{xy}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega})\, H^{*}(e^{j\omega})$$
$$S_{yy}(e^{j\omega}) = S_{xy}(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega}) \qquad (۵\text{-}۱۴۷)$$
$$S_{yy}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega})\, |H(e^{j\omega})|^{۲}$$

اگر $h[n]$ حقیقی باشد در این صورت $H^{*}(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$ بوده و داریم

$$S_{yy}(z) = S_{xx}(z)\, H(z)\, H(z^{-1})$$

(۵-۱۴۸)

مسائل فصل ۵

۵-۱ فرآیند $X(t)=e^{at}$ خانواده ای از نمائی‌های وابسته به متغیر تصادفی a است. میانگین $\eta(t)$، تابع خودبستگی $R(t_1,t_2)$ و چگالی مرتبهٔ یک $f(x,t)$ از $X(t)$ را برحسب چگالی $f_a(a)$ از a بیابید.

۵-۲ متغیر تصادفی c در فاصلهٔ $(0, T)$ یکنواخت است. $R_x(t_1,t_2)$ را بیابید، اگر

(الف) $X(t)=U(t-c)$

(ب) $X(t)=\delta(t-c)$

باشد.

۵-۳ متغیرهای تصادفی b و a مستقل و به صورت $N(0, \delta)$ می‌باشند و p احتمال این است که فرآیند $X(t)=a-bt$ محور t را در فاصلهٔ $(0, T)$ قطع نماید. نشان دهید که $\pi p=\arctan T$ می‌باشد.

راهنمایی: $p=P\{0\le a/b\le T\}$

۵-۴ فرآیند $X(t)$، با تابع خودبستگی $R(\tau)$ است.

(الف) نشان دهید که

$$P\{|X(t+\tau)-X(t)|\ge a\} \le 2[R(0)-R(\tau)]/a^2$$

(ب) $P\{|X(t+\tau)-X(t)|\ge a\}$

را برحسب چگالی مرتبهٔ دوم $f(x_1, x_2, \tau)$ از $X(t)$ بیان کنید.

۵-۵ نشان دهید که اگر فرآیند اتفاقی $X(t)$, WSS با $E\{X(t)\}=0$ و $R(\tau)=4e^{-2|\tau|}$ باشد، (الف) $P\{X(t)\le 3\}$، (ب) $E\{[X(t+\tau)-X(t)]^2\}$ را بیابید.

۵-۶ نشان دهید فرآیند $X(t)$, WSS است، اگر و فقط اگر $E\{c\}=0$ و $W(t)=4e^{j(\theta\omega t+\theta)}$ باشد.

۵-۷ فرآیند $X(t)$ نرمال، WSS و $E\{X(t)\}=0$ است.

نشان دهید که اگر $Z(t)=X^2(t)$ باشد، آنگاه $C_{zz}(\tau)=2C_{xx}(\tau)$ است.

۵-۸ نشان دهید که اگر $X(t)$ فرآیند نرمال با میانگین صفر و خود همبستگی $f(t_1)f(t_2)W(t_1-t_2)$ باشد، آنگاه فرآیند $Y(t)=X(t)/f(t)$، WSS با خودهمبستگی $W(t)$ است.

اگر $X(t)$ نویز سفید با خودهمبستگی $q(t_1)\delta(t_1-t_2)$ باشد، آنگاه فرآیند $Z(t)=X(t)/\sqrt{q(t)}$ نویز سفید WSS با خودهمبستگی $\delta(\tau)$ است.

۵-۹ نشان دهید که اگر $X(t)$ فرآیند مختلط WSS باشد، آنگاه

$$E\{|X(t+\tau)-X(t)|^2\} \leq 2\mathrm{Re}[R(0)+R(\tau)]$$

۵-۱۰ نشان دهید که اگر φ متغیر تصادفی با

$$\Phi(1)=\Phi(2)=0 \quad \text{و} \quad \Phi(\lambda)=E\{e^{j\lambda\varphi}\}$$

باشد، آنگاه فرآیند $X(t)=\cos(\omega t+\varphi)$، WSS است اگر φ در فاصلهٔ $(-\pi,\pi)$ یکنواخت باشد، آنگاه $E\{X(t)\}=0$ و $R_x(\tau)$ را بیابید.

۵-۱۱ فرآیند $X(t)$ نرمال با $\eta_x=0$ و $R_x(\tau)=4e^{-3|\tau|}$ است.
سیستم بدون حافظه $g(x)$ را طوری بیابید که چگالی مرتبه اول $f_y(y)$ از خروجی نتیجه $Y(t)=g[X(t)]$ در فاصلهٔ (۶,۹) یکنواخت باشد.

۵-۱۲ فرآیند $X(t)$ نرمال با $\eta_x=0$ و $R_x(\tau)=4e^{-2|\tau|}$ داده شده است.
متغیرهای تصادفی $Z=X(t+1)$ و $W=X(t-1)$ را تشکیل می‌دهیم.

(الف) $E\{ZW\}$ **و** $E\{(Z+W)^2\}$

(ب) $f_{zw}(Z,W)$ **و** $f_z(Z)$ **و** $P\{Z<1\}$

را بیابید.

۵-۱۳ نشان دهید که اگر $X(t)$ فرآیند نرمال با تابع خودبستگی $R(\tau)$ باشد، آنگاه داریم:

$$P\{X'(t)\leq a\}=G\left[\frac{a}{\sqrt{-R''(0)}}\right]$$

۵-۱۴ نشان دهید که اگر $X(t)$ فرآیند نرمال با میانگین صفر و $Y(t)=Ie^{\alpha X(t)}$ باشد، آنگاه داریم:

$$\eta_y=I\exp\{\frac{a^2}{2}R_x(0)\} \qquad R_y(\tau)=I^2\exp\{a^2[R_x(0)+R_x(\tau)]\}$$

۵-۱۵ نشان دهید که اگر

$$S=\int_0^{10} X(t)dt \quad \Rightarrow \quad E\{S^2\}=\int_0^{10}(10-|\tau|)R_x(\tau)d\tau$$

میانگین و واریانس S را بیابید، اگر $E\{X(t)\}=8$ و $R_x(\tau)=64+10e^{-2|\tau|}$ باشد.

۵-۱۶ فرآیند $X(t)$، WSS با $R_{xx}(\tau)=5\delta(\tau)$ و

$Y'(t)+2Y(t)=X(t)$ (۱) داده شده است.

$$E\{Y^2(t)\} \text{ ، } R_{xy}(t_1,t_2) \text{ و } R_{yy}(t_1,t_2)$$

رابیابید، اگر (۱) برقرار برای همه t باشد.

ب)اگر $Y(0)=0$ و (۱) برقرار برای $t\geq 0$ باشد.

۵-۱۷ نشان دهید که اگر $Y(t)=X(t+\alpha)-X(t-\alpha)$ باشد، آنگاه داریم:

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)-R_x(\tau+2\alpha)-R_x(\tau-2\alpha) \qquad S_y(\omega)=4S_x(\omega)\sin^2 a\omega$$

۵-۱۸ فرآیند $X(t)$ نرمال، با میانگین صفر و $R_x(\tau)=Ie^{-\alpha|\tau|}$ است.

نشان دهید که اگر $Y(t)=X^2(t)$ باشد، آنگاه

$$C_y(\tau)=I^2e^{-2\alpha|\tau|}(1+\cos 2b\tau)$$

است. $S_y(\omega)$ را بیابید.

۵-۱۹ فرآیند $X(t)$ ، WSS با $E\{X(t)\}=5$ $R_{xx}(\tau)=25+4e^{-2|\tau|}$ است.

اگر $Y(t)=2X(t)+3X'(t)$ باشد، آنگاه $S_{yy}(\omega)$ را بیابید.

۵-۲۰ فرآیند $X(t)$، WSS با $R_{xx}(\tau)=5\delta(\tau)$ است.

(الف) $E\{Y^2(t)\}$ و $S_{yy}(\omega)$ را بیابید اگر $Y'(t)=+3Y(t)=X(t)$ باشد.

$E\{Y^2(t)\}$ و $R_{xy}(t_1,t_2)$ را بیابید، اگر $Y'(t)+3Y(t)=X(t)U(t)$ باشد.

توابع $R_{xy}(2,t_2)$ و $R_{xy}(t_1,3)$ را رسم کنید.

۵-۲۱ (تشدید اتفاقی) ورودی به سیستم

$$H(s)=\frac{1}{s^2+2s+5}$$

فرآیند $X(t)$، WSS با $E\{X(t)\}=0$ است. $S_x(\omega)$ را طوری بیابید که طیف قدرت $E\{Y^2(t)\}$ از خروجی $Y(t)$ حداکثر است.

راهنمایی: $|H(j\omega)|$ حداکثر برای $\omega=\sqrt{3}$ است.

۵-۲۲ نشان دهید که اگر فرآیند $X[n]$، WSS و $R_x[1]=R_x[0]$ باشد، آنگاه $R_x[m]=R_x[0]$ برای هر m است.

۵-۲۳ نشان دهید که اگر $R[m]=E\{X[n+m]X[n]\}$ باشد، آنگاه

$$R[0]R[2]>2R^2[1]-R^2[0]$$

۵-۲۴ متغیر تصادفی ω با چگالی $f(\omega)$ داده شده است. این تابع برای $|\omega|>\pi$ صفر است. فرآیند $X[n]=Ae^{jn\omega_0}\pi$ را تشکیل می‌دهیم.

نشان دهید که $S_x(\omega)=2\pi A^2 f(\omega)$ برای $|\omega|<\pi$ است.

۵-۲۵ الف $E\{Y^2(t)\}$ را بیابید، اگر $Y(0)=Y'(0)=0$ و

$$Y''(t)+7Y'(t)+10Y(t)=X(t)\quad R_x(\tau)=5\delta(\tau)$$

باشد.

(ب) $E\{Y^2[n]\}$ را بیابید، اگر $Y(-1)=Y(-2)=0$ و

$$8Y[n]+6Y[n-1]+Y[n-2]=X[n]\quad R_x[m]=5\delta[m]$$

باشد.

۵-۲۶ فرآیند $X[n]$، WSS با $R_{xx}[m]=5\delta[m]$ و

$$(1) \quad Y[n]-0/5Y[n-1]=X[n]$$

باشد.

$$R_{yy}[m_1, m_2] \ , \ R_{xy}[m_1, m_2] \ ، \ E\{Y^2[n]\}$$

را بیابید، اگر (۱) برقرار برای همه n باشد.

(ب) اگر $Y(-1)=0$ و (۱) برقرار برای $n \geq 0$ باشد.

۵-۲۷ نشان دهید که (الف) اگر $R_x[m_1, m_2]=q[m_1]\delta[m_1-m_2]$ و

$$S=\sum_{n=0}^{N} a_n X[n] \ \Rightarrow \ E\{S^2\}=\sum_{n=0}^{N} a_n^2 q[n]$$

(ب) اگر $R_{xx}(t_1,t_2)=q(t_1)\delta(t_1-t_2)$ و

$$S=\int_0^T a(t)X(t)dt \quad \Rightarrow \quad E\{S^2\}=\int_0^T a^2(t)q(t)dt$$