تعاریف :

همانگونه که قبلاً گفته شد مفهوم متغیر تصادفی X در واقع قاعده ای برای اختصاص عددی به نام $X(\xi)$ به هر نتیجه ξ در آزمایشی مانند S می باشد . فرآیند تصادفی $X(t)$ مشابهاً قاعده ای به منظور اختصاص تابعی مانند $X(t,\xi)$ به هر ξ است . بنابراین فرآیند تصادفی خانواده ای از توابع زمانی است که به پارامتر ξ بستگی دارد و یا معادلاً تابعی از دو پارامتر t , ξ است . حوزه ξ مجموعه‌ای از تمام نتایج آزمایش‌ها و حوزه t مجموعه R از اعداد حقیقی می باشد . اگر R محور حقیقی باشد، در آن صورت $X(t)$ فرآیند پیوسته زمان خواهد بود . اگر R مجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد در آن صورت $X(t)$ فرآیند گسسته زمان است .

بنابراین فرآیند گسسته زمان دنباله ای از متغیرهای تصادفی است . چنین دنباله ای را با نماد X_n یا $X[n]$ نمایش خواهیم داد . اگر مقادیر فرآیند $X(t)$ قابل شمارش باشد آن را فرآیندگسسته حالت نامند .در غیر این صورت فرآیند را پیوسته حالت گویند . به منظور معرفی فرآیند تصادفی مانند مورد متغیر تصادفی ، وابستگی آن به ξ را نمایش نداده و آن را به صورت $X(t)$ توصیف می‌کنیم .

بنابراین فرآیند تصادفی $X(t)$ دارای تعابیر زیر خواهد بود :

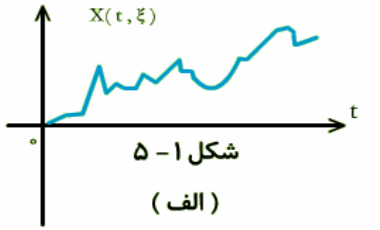
۱-آن خانواده‌ای (یا مجموعه‌ای) از توابع $X(t,\xi)$ است . در این تعبیر t , ξ هر دو متغیرهستند .

۲- آن فقط یک تابع زمانی (یا نمونه ای از یک فرآیند مفروض) می باشد . در این حالت ، t متغیرو ξ ثابت است .

۳-اگر t ثابت و ξ متغیر باشد ،در این صورت $X(t)$ متغیری تصادفی است که با حالت فرآیند مفروض در لحظه t برابر است

۴-اگر t , ξ هر دو ثابت باشند در آن صورت $X(t)$ یک عدد خواهد بود .

یک مثال فیزیکی برای فرآیند تصادفی حرکت ذرات میکروسکوپی در برخورد با مولکول ها در یک مایع (حرکت براونی) است . فرآیند $X(t)$ حاصله از حرکات تمام ذرات (خانواده) تشکیل شده است . یک تحقق تنها از این فرآیند مانند $X(t,\xi_i)$ که در شکل (۱-۵ الف) نشان داده شده است حرکت یک ذره (نمونه) بخصوص و معین خواهد بود .



شکل ۱ – ۵

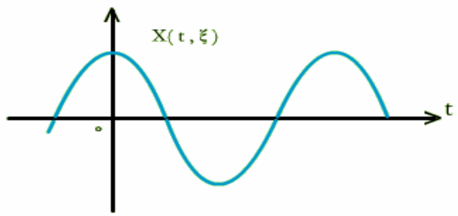
(الف)

مثال دیگر ولتاژ : $X(t) = r\cos(\omega t+\Phi)$ مربوط به مولد جریان متناوب با دامنه تصادفی r و فاز تصادفی Φ است .

در این مورد ،فرآیند $X(t)$ از خانواده ای از توابع سینوسی خالص تشکیل یافته و یک نمونه از این تابع یعنی

$$X(t,\xi_i) = r(\xi_i)\cos[\omega t + \Phi(\xi_i)]$$

در شکل (۱-۵ ب) نمایش داده شده است .



شکل ۱ – ۵

(ب)

بنا به تعریف مطرح شده در فوق ، هر دو مثال فرآیندهای تصادفی هستند ولی در هر حال بین آنها تفاوت اساسی وجود دارد .

مثال اول (عادی) از خانواده ای از توابع تشکیل یافته است که نمی‌توان آنها را برحسب تعداد محدود و معینی از پارامترها توصیف کرد . علاوه بر این ، مقدار آتی نمونه $X(t,\xi)$ را نمی‌توان بر حسب گذشته فرآیند تعیین نمود . بالاخره باید گفت تحت شرایط خاصی ، خصوصیات آماری فرآیند عادی $X(t)$ را می‌توان برحسب یک نمونه تنها تعیین کرد .

مثال دوم (قابل پیش بینی) از خانواده ای از امواج سینوسی خالص تشکیل شده و به طور کامل برحسب متغیرهای تصادفی r , Φ مشخص گردیده است . علاوه برآن ، اگر $X(t,\xi)$ به ازاء $t \le t_\circ$ معلوم و شناخته شده باشد ، درآن صورت می‌توان آن را به ازاء $t > t_\circ$ تعیین کرد . بالاخره باید اذعان کرد که یک نمونه تنها مانند $X(t,\xi)$ خصوصیات کل فرآیند را مشخص نمی‌کند چون آن نمونه فقط به مقادیر خاص $r(\xi)$ و $\Phi(\xi)$ مربوط به متغیرهای تصادفی r و Φ بستگی دارد . تعریف کامل فرآیندهای عادی و قابل پیش بینی در فصول آتی مطرح و ارائه خواهد شد .

دو فرآیند تصادفی $X(t)$ و $Y(t)$ هنگامی با هم برابرند (در همه جا) که نمونه‌های آن ها $X(t,\xi)$ و $Y(t,\xi)$ به ازاء هر ξ با هم برابر باشند . مشابهاً تساوی $Z(t) = X(t) + Y(t)$ به این مفهوم است که به ازاء هر ξ ، $Z(t,\xi) = X(t,\xi) + Y(t,\xi)$ مشتقات ، انتگرال‌ها و هرگونه عملیات دیگر در مورد فرآیندهای تصادفی مشابه عملیات متناظر برای هر نمونه تعریف می‌شوند . در مورد حدها ، تعاریف فوق را می‌توان آسان‌تر مطرح کرد . برای مثال به مفهوم تساوی MS اشاره کرده و می‌دانیم که مشتقات و انتگرال‌های MS مشابهاً تعریف می‌شوند .

دو فرآیند $X(t)$ و $Y(t)$ هنگامی از نظر مفهوم MS با هم برابر هستند که اگر و فقط اگر به ازاء هر t رابطه‌ی زیر برقرار باشد :

$$E\{|X(t)-Y(t)|^{2}\} = 0 \qquad (۵-۱)$$

تساوی از نظر مفهوم MS به نکات زیر منجر می‌شود . A_t را مجموعه ای از نتایج ξ تعریف می‌کنیم ، به طوری که به ازاء هر t مشخص $X(t,\xi) = Y(t,\xi)$ بوده و همچنین A_∞ را مجموعه ای از نتایج ξ توصیف می‌کنیم‌که به ازاء هر t ، $X(t,\xi) = Y(t,\xi)$ باشد . رابطه (۵-۱) بیان می‌کند که $X(t,\xi) - Y(t,\xi) = 0$ با احتمال ۱ بوده و بنابراین $P(A_t) = P(S) = 1$ می‌باشد ولی به هرحال از این رابطه نمی‌توان نتیجه گرفت که $P(A_\infty) = 1$ است چون A_∞ اشتراک تمام مجموعه‌های A_t به ازاء جمیع مقادیر t بوده و حتی ممکن است $P(A_\infty)$ برابر صفر باشد

فرآیند تصادفی شامل تعداد نامحدود و غیر قابل شمارشی از متغیرهای تصادفی است به طوری‌که به ازاء هر t مشخص ، $X(t)$ یک متغیر تصادفی با توزیع

$$F(x,t) = P\{X(t) \le x\} \qquad (۵-۲)$$

می‌باشد . این تابع به t وابسته بوده و با احتمال پیشآمد $\{X(t) \le x\}$ برابر است ، پیشآمدی که شامل تمام نتایج ξ به نحوی است که در هر زمان مشخص مانند t ، نمونه‌های $X(t,\xi)$ فرآیند مورد نظر از عدد x تجاوز نمی‌کنند .

تابع $F(x,t)$ را تابع توزیع مرتبه اول فرآیند $X(t)$ نامند . مشتق آن نسبت به x

$$f(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \qquad (۵-۳)$$

را تابع چگالی احتمال مرتبه اول $X(t)$ گویند .

تابع توزیع مرتبه دوم فرآیند $X(t)$ را در واقع تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ نامند .

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2;t_1,t_2) &= \\ &= p\{X(t_1) \le x_1 \text{ و } X(t_2) \le x_2\} \end{aligned} \qquad (۵-۴)$$

تابع چگالی احتمال متناظر نیز عبارت است از

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^{2} F(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \, \partial x_2} \qquad (۵-۵)$$

روابط زیر به سهولت از تعاریف فوق قابل استنتاج است

$$F(x_1;t_1) = F(x,\infty;t_1,t_2)$$

$$f(x_1;t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_2$$

تابع توزیع مرتبهٔ n فرآیند $X(t)$ تابع توزیع توأم متغیرهای تصادفی $X(t_1), \ldots\ldots, X(t_n)$ بوده و به صورت $F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots.,t_n)$ نشان داده می‌شود .

به منظور توصیف کامل آماری فرآیند تصادفی $X(t)$ ، آگاهی و شناخت تابع توزیع مرتبه n فرآیند مذکور به ازاء هر x_i ، t_i و n ضروری است .

معذالک در بسیاری از کاربردها فقط متوسط های معینی ، به خصوص مقدار متوسط $X(t)$ و $X^2(t)$ ، به کار می‌روند . این‌کمیات را می‌توان برحسب خصوصیات آماری مرتبهٔ دوم $X(t)$ به شرح زیر توصیف کرد .

تابع متوسط

تابع متوسط $\eta(t)$ مربوط به فرآیند $X(t)$ مقدار قابل انتظار متغیرتصادفی $X(t)$ است .

$$\eta(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,t)\, dx$$ (۵-۶)

تابع هم بستگی

تابع هم بستگی $R(t_1,t_2)$ مربوط به فرآیند $X(t)$ مقدار قابل انتظار حاصل ضرب $X(t_1)X(t_2)$ است .

$$R(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1 dx_2$$ (۵-۷)

مقدار $R(t_1,t_2)$ روی قطر $t_1 = t_2 = t$ در واقع توان متوسط $X(t)$ است .

$$E\{X^2(t)\} = R(t,t)$$

تابع کوواریانس

تابع کوواریانس مربوط به فرآیند $X(t)$ در واقع کوواریانس متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ می باشد .

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - \eta(t_1)\,\eta(t_2)$$ (۵-۸)

و مقدار آن روی قطر $t_1 = t_2 = t$ یعنی $C(t,t)$ برابر واریانس $X(t)$ خواهد بود

فصل ۵ : فرآیندهای تصادفی

مثال(۱-۵)

تابع هم بستگی فرآیند تصادفی

$$X(t) = r\cos(\omega t + \varphi)$$

را که در آن r و φ متغیرهای تصادفی مستقل بوده و φ دارای توزیع یکنواخت در بازهٔ $(-\pi,\pi)$ است ، تعیین کنید . می‌دانیم که :

$$E\{X(t_1)X(t_2)\} = \frac{1}{2} E\{r^2\} E\{\cos\omega(t_1-t_2) + \cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\varphi)\}$$

و چون

$$E\{\cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\varphi)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\varphi)\, d\varphi = 0$$

پس نتیجه می‌گیریم

$$R(t_1,t_2) = \frac{1}{2} E(r^2)\cos\omega(t_1-t_2)$$

مثال(۲-۵) فرآیند پواسون

قبل از آن که با فرآیند پواسون آشنا شویم ضروری است نکاتی را در رابطه با نقاط تصادفی پواسون مطرح نماییم .

فرض کنید n نقطه تصادفی را در بازهٔ $(-T/2, T/2)$ قرار می‌دهیم و احتمال این که k عدد از این نقاط در بازهٔ (t_1,t_2) به طول $t_2 - t_1 = t_\alpha$ قرار داشته باشند را با $P(t_\alpha$ در $k)$ نشان می‌دهیم .

می‌توان گفت که

$$P(t_\alpha \text{ در } k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

که $p = \frac{t_\alpha}{T}$ است .

حال اگر $n >> 1$ و $t_\alpha << T$ باشد با استناد به رابطهٔ (۷۸-۱) می‌توان نتیجه گرفت که

$$P(t_\alpha \text{ در } k) \simeq \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = \frac{(n t_\alpha / T)^k}{k!} e^{-n t_\alpha / T}$$

تصور کنید n و T به نحو نامحدودی افزایش یافته ولی نسبت $\lambda = \frac{n}{T}$ ثابت باقی بماند . نتیجه مجموعهٔ نامحدودی از نقاط خواهد بود که سراسرمحور t را از $-\infty$ تا $+\infty$ اشغال کرده اند .

پس احتمال این که k عدد از این نقاط در بازه‌ای به طول t_α قرار گیرند برابر است با

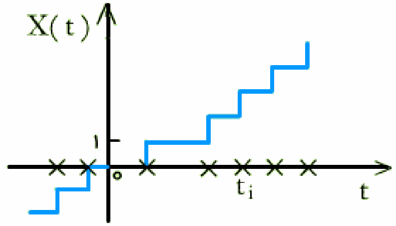
$$P(t_\alpha \text{ در } k) = e^{-\lambda t_\alpha} \frac{(\lambda t_\alpha)^k}{k!}$$

به عبارت دیگر عدد $n(t_1, t_2)$ یعنی تعداد نقاط پواسون t_i در بازهٔ (t_1, t_2) به طول $t = t_2 - t_1$ یک متغیرتصادفی پواسون با پارامتر λt است.

$$p\{n(t_1, t_2) = k\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \qquad (۵-۹)$$

از طرف دیگر می توان نشان داد که اگر بازه های (t_1, t_2) و (t_3, t_4) غیر هم پوشان باشند در آن صورت متغیرهای تصادفی $n(t_1, t_2)$ و $n(t_3, t_4)$ مستقل از یکدیگر می باشند .

حال با استفاده از نقاط تصادفی پواسون t_i فرآیند تصادفی $X(t) = n(0, t)$ را مطابق شکل (۲-۵ الف) تعریف می‌کنیم . این فرآیند گسسته حالت از مجموعه‌ای از توابع پله‌ای افزایشی با ناپیوستگی‌ها در نقاط t_i تشکیل یافته است .



فرایند پواسون

شکل (۲-۵ الف)

به ازاء یک t معین ، $X(t)$ یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λt می باشد ، بنابراین $E\{X(t)\} = \eta(t) = \lambda t$ با استناد به رابطهٔ (۸-۲) می‌توان نوشت $E\{X(t^2)\} = \lambda t + \lambda^2 t^2$. متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2) - X(t_1)$ از یکدیگر مستقل هستند چون بازه های $(0, t_1)$ و (t_1, t_2) غیر هم‌پوشان می‌باشند

علاوه بر این ، آن‌ها دارای توزیع پواسون با پارامترهای λt_1 و $\lambda(t_2 - t_1)$ هستند . پس

$$E\{X(t_1)[X(t_2) - X(t_1)]\} =$$

$$E\{X(t_1)\} E\{X(t_2) - X(t_1)\} = \lambda t_1 \, \lambda (t_2 - t_1)$$

با استفاده از تساوی $X(t_1) X(t_2) = X(t_1)[X(t_1) + X(t_2) - X(t_1)]$ می‌توان به آسانی به نتیجه زیر رسید

$$R(t_1, t_2) = \{E X(t_1) X(t_2)\} = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 \lambda (t_2 - t_1)$$

در تحلیل فوق البته فرض کردیم $t_1 < t_2$ می باشد پس در حالت کلی می‌توان گفت تابع همبستگی فرآیند پواسون عبارت است از

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{و} \quad t_1 \leq t_2 \\ \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{و} \quad t_1 \geq t_2 \end{cases} \qquad (۵-۱۰)$$

و نیز تابع کوواریانس فرآیند پواسون برابر است با

$$C(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) = \lambda t_1 U(t_2 - t_1) + \lambda t_2 U(t_1 - t_2) \qquad (۵-۱۱)$$

اگر نقاط تصادفی پواسون t_i دارای چگالی غیریکنواخت یعنی $\lambda(t)$ باشند در آن صورت باید گفت نتایج فوق هنوز اعتبارخواهند داشت مشروط بر آن که حاصل ضرب $\lambda(t_2-t_1)$ به انتگرال $\lambda(t)$ از t_1 تا t_2 تبدیل شود بنابراین

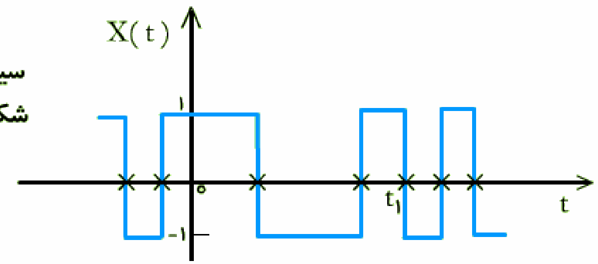
$$E\{X(t)\} = \int_0^t \lambda(\alpha)\,d\alpha$$

و

$$R(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\lambda(t)\,dt\,\left[1+\int_0^{t_2}\lambda(t)\,dt\right] \qquad t_1 \le t_2$$

مثال ۳-۵ سیگنال تلگراف

با استفاده از نقاط پواسون t_i فرآیند $X(t)$ را به نحوی تشکیل می‌دهیم که اگر تعداد نقاط در بازهٔ $(0,t)$ زوج باشد $X(t)=1$ بوده و اگر این تعداد فرد باشد $X(t)=-1$ خواهد بود (شکل ۲-۵ ب)



سیگنال تلگراف
شکل (۲-۵ ب)

پس

$$E\{X(t)\} = e^{-\lambda t}(\cosh\lambda t - \sinh\lambda t) = e^{-2\lambda t} \qquad (۵-۱۱)$$

به منظور تعیین $R(t_1,t_2)$ توجه داریم که اگر $X(t_2)=1$ ، $t=t_1-t_2>0$ ، آن گاه $X(t_1)=1$ خواهد بود اگر تعداد نقاط در بازهٔ (t_1,t_2) زوج باشد .

بنابراین $t=t_1-t_2$ و $P\{X(t_1)=1 / X(t_2)=1\} = e^{-\lambda t}\cosh\lambda t$

با ضرب کردن در $P\{X(t_2)=1\}$ می‌توان نوشت

$$P\{X(t_1)=1, X(t_2)=1\} = e^{-\lambda t}\cosh\lambda t\; e^{-\lambda t_2}\cosh\lambda t_2$$

به طور مشابه

$$P\{X(t_1)=-1, X(t_2)=-1\} = e^{-\lambda t}\cosh\lambda t\; e^{-\lambda t_2}\sinh\lambda t_2$$

$$P\{X(t_1)=1, X(t_2)=-1\} = e^{-\lambda t}\sinh\lambda t\; e^{-\lambda t_2}\sinh\lambda t_2$$

احتمال اینکه تعداد نقاط در بازهٔ $(0,t)$ برابر k باشد را با $p(k)$ نشان داده با توجه به رابطهٔ (۹-۵) می‌توان نتیجه گرفت که

$$P\{X(t)=1\} = p(0)+p(2)+\dots = e^{-\lambda t}\left[1+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\dots\right] = e^{-\lambda t}\cosh\lambda t$$

$$P\{X(t)=-1\} = p(1)+p(3)+\dots = e^{-\lambda t}\left[1+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\dots\right] = e^{-\lambda t}\sinh\lambda t$$

$$P\{X(t_1)=-1, X(t_2)=1\} = e^{-\lambda t}\sinh\lambda t\; e^{-\lambda t_2}\cosh\lambda t_2$$

از آنجا که حاصلضرب‌های $X(t_1)\times(t_2)$ برابر ۱ یا -۱ است با حذف جزییات نتیجه می‌گیریم که $R(t_1,t_2)=e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$

این فرآیند را سیگنال تلگراف نیمه تصادفی می‌نامند

چون مقدار $X(0)=1$ در $t=0$ غیر تصادفی است برای رفع این قطعیت فرآیند $Y(t)=aX(t)$ را تشکیل می‌دهیم که در آن a یک متغیر تصادفی مستقل از $X(t)$ بوده و مقادیر +۱ و -۱ را با احتمال یکسان اختیار می کند فرآیند $Y(t)$ که چنین تعریف شده است ، سیگنال تلگراف تصادفی نامیده می‌شود از آنجا که $E\{a\}=0$ و $E\{a^2\}=1$ است ، متوسط $Y(t)$ برابر $E\{a\}E\{X(t)\}=0$ بوده و هم بستگی آن

برابر است با $E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = E\{a^2\}E\{X(t_1)X(t_2)\} = e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$ توجه داریم

که به ازاء $t \to \infty$ فرآیندهای $Y(t)$ و $X(t)$ به صورت مجانبی دارای خصوصیات آماری یکسان هستند

در این مرحله از بررسی به نکات بیشتری در مورد فرآیندهای پواسون می‌پردازیم . اگر $X_1(t)$ و $X_2(t)$ دو فرآیند مستقل پواسون به ترتیب با پارامترهای $\lambda_1 t$ و $\lambda_2 t$ باشند ، به آسانی می‌توان گفت که $X_1(t)+X_2(t)$ نیز فرآیندی پواسون با پارامتر $(\lambda_1+\lambda_2)t$ است .

در مورد تفاضل آنها چه می‌توان گفت ؟

توزیع چنین فرآیندی به چه شکل می‌باشد ؟

فرض کنید $Y(t) = X_1(t) - X_2(t)$

که در آن $X_1(t)$ و $X_2(t)$ دو فرآیند مستقل هستند . آن گاه

$$P\{Y(t)=n\} = \sum_{k=0}^{\infty} p\{X_1(t)=n+k\}\, p\{X_2(t)=k\}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^{n+k}}{(n+k)!}\, e^{-\lambda_2 t}\frac{(\lambda_2 t)^{k}}{k!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{\lambda_1\lambda_2})^{n+2k}}{k!(n+k)!}$$

$$P\{Y(t)=n\} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n/2} I_{|n|}(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,t) \qquad (۵-۱۲)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

که در آن

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \qquad (۵-۱۳)$$

تابع بسل اصلاح شدهٔ مرتبهٔ n است . با استفاده از رابطهٔ گشتاور دوم فرآیند پواسون و تعریف فرآیند $Y(t)$ داریم

$E\{Y(t)\} = (\lambda_1-\lambda_2)t \quad , \quad Var\{Y(t)\} = (\lambda_1+\lambda_2)t$

پس ملاحظه می‌کنیم که تفاضل دو فرآیند تصادفی مستقل پواسون ، فرآیند با توزیع پواسون نیست .

به هر صورت به آسانی می‌توان نشان داد که انتخاب تصادفی از فرآیند پواسون ، فرآیندی پواسون است . فرض کنید $X(t) \sim P(\lambda t)$ فرآیندی پواسون با پارامتر λt بوده و هر رخداد $X(t)$ به طور مستقل با احتمال p بر چسب دار می‌شود .

همچنین تصور کنید $Y(t)$ تعداد کل پیشآمدهای برچسب دار در بازهٔ $(0,t)$ ، $Z(t)$ تعداد کل پیشآمدهای بدون برچسب بازهٔ $(0,t)$ باشند در آن صورت

$$Y(t) \sim P(\lambda p t) \qquad Z(t) \sim P(\lambda q t)$$

که در آن $q = 1 - p$ است .

به منظور اثبات نتایج فوق ، فرض کنید A_n نمایش پیشآمد " n تعداد پیشآمدرخ داده در بازهٔ $(0,t)$ و k تعداد پیشآمدهای برچسب دار باشد آن گاه "

$P(A)_n = P\{$پیشآمدهای بر چسب دار $k / X(t)=n\}P\{X(t)=n\}$

$$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

همچنین پیشآمد $\{Y(t)=k\}$ اجتماع ناسازگار پیشآمدهای $A_k, A_{k+1}, \ldots$ است . بنابراین

$$P\{Y(t)=k\} = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

در نتیجه

$$P\{Y(t)=k\}=\sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = e^{-\lambda t}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{k!(n-k)!}\,p^k q^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda t}\frac{(kpt)^k}{k!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda qt)^r}{r!}$$

$$= e^{-\lambda(1-q)t}\frac{(kpt)^k}{k!} = e^{-\lambda pt}\frac{(kpt)^k}{k!}\quad,\quad k=0,1,2,\dots$$

پس نتیجه فوق نشان می‌دهدکه $Y(t)$ فرآیند پواسون با پارامتر λpt است .
به طور مشابه پیشآمدهای بدون برچسب $Z(t)$ تشکیل فرآیند پواسون با پارامتر λqt را می‌دهد .

برای مثال ، اگر مشتری ها بر طبق فرآیند پواسون با پارامتر λt به گیشه مراجعه نمایند و احتمال مرد بودن مراجعین p باشد آن گاه مراجعین مرد تشکیل فرآیند پواسون با پارامتر λpt و مراجعین زن تشکیل فرآیند پواسون مستقل با پارامتر λqt را می‌دهد .

حال نشان می‌دهیم که احتمال شرطی زیر مجموعه‌ای از پیشآمدهای پواسون در حقیقت دو جمله‌ای است . به ازاء $t_1<t_2$ احتمال شرطی زیر را در نظر بگیرید

$$P\{X(t_1)=k\,/\,X(t_2)=n\} = \frac{P\{X(t_1)=k,\,X(t_2)=n\}}{P\{X(t_2)=n\}}$$

$$=\frac{P\{X(t_1)=k\,,\,n(t_1-t_2)=n-k\}}{P\{X(t_2)=n\}}$$

$$=\frac{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)^k}{k!}\;\frac{e^{-\lambda(t_2-t_1)}[\lambda(t_2-t_1)]^{n-k}}{(n-k)!}\;\frac{n!}{e^{-\lambda t_2}(\lambda t_2)^n}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^k\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)^{n-k}\sim B\left(n\,,\frac{t_1}{t_2}\right),\ k=0,1,2,\dots,n$$

که این نتیجه ادعای ما را اثبات می‌کند . به طور اخص فرض کنید $k=n=1$ بوده و Δ زیر بازه ای در شروع بازه به طول T باشد آن گاه با توجه به نتیجه فوق داریم

$$P\{n(\Delta)=1\,/\,n(t\,,t+T)=1\}=\frac{\Delta}{T}$$

اما پیشآمد $\{n(\Delta)=1\}$ معادل $\{t_i\le t<t+\Delta\}$ است که در آن t_i زمان رسیدن Arrival تصادفی می‌باشد . بنابراین عبارت بالا رابطهٔ زیر را نشان می‌دهد

$$P\{t<t_i<t+\Delta\,/\,n(t\,,t+T)=1\}=\frac{\Delta}{T}$$

یعنی اگر فقط یک پیشآمد پواسون در بازه به طول T رخ دهد ، تابع چگالی احتمال شرطی زمان رسیدن در این بازه یکنواخت است به عبارت دیگر زمان رسیدن پواسون در هر کجا از بازهٔ T دارای احتمال یکسان است مشروط به آن که فقط یک رخداد در آن بازه صورت گرفته باشد .

به بیان کلی‌تر ، $t_1<t_2<\dots t_n<T$ ، تعداد n زمان رسیدن فرآیند پواسون در بازهٔ $(0\,,T)$ را نشان دهد آن گاه توزیع شرطی توأم $t_1,t_2,\dots,t_n$ با فرض $X(T)=n$ به رابطهٔ زیر ساده می‌شود

$$P\{t_1\le x_1\,,t_2\le x_2,\dots,t_n\le x_n\,/\,X(T)=n\}=$$

$$=\frac{P\{t_1\le x_1\,,t_2<x_2,\dots,t_n\le x_n\,,X(T)=n\}}{P\{X(T)=n\}}$$

$$= \frac{1}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} \sum_{\{m_1,m_2,\dots,m_n\}} \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda(x_i-x_{i-1})} \frac{[\lambda(x_i-x_{i-1})]^{m_i}}{m_i!}$$

$$=\sum_{m_1,m_2,\dots,m_n} \frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_n!}\left(\frac{x_1}{T}\right)^{m_1}\left(\frac{x_2-x_1}{T}\right)^{m_2}\cdots\cdots\left(\frac{x_n-x_{n-1}}{T}\right)^{m_n}$$

در این رابطه $x_0=0$ است. مجموع بر روی کلیه اعداد صحیح نامنفی $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ گرفته شد

$m_1+m_2+\dots+m_k \ge k=1, 2, \dots, n-1$ و $m_1+m_2+\dots+m_n=n$

است . رابطه فوق توزیع n نقطه مستقل به ترتیب صعودی را نشان می‌دهد که هر یک از آن ها دربازهٔ $(0, T)$ به طور یکنواخت توزیع شده اند .

در نتیجه فرآیند پواسون $X(t)$ نقاط را به طور تصادفی دربازهٔ $(0, \infty)$ توزیع می‌کند و این روش مشابه روشی است که متغیر تصادفی یکنواخت نقاط را در بازهٔ محدود توزیع می‌نماید

خواص عمومی

خواص آماری فرآیند تصادفی حقیقی $X(t)$ بر حسب توزیع مرتبهٔ n آن به طور کامل قابل تعیین است

$$F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = P\{X(t_1)\le x_1, \dots, X(t_n)\le x_n\} \qquad (۵-۱۴)$$

خصوصیات آماری توأم دو فرآیند حقیقی $X(t)$ و $Y(t)$ برحسب توزیع توأم متغیرهای تصادفی زیر تعیین می‌شود .

$$X(t_1), \dots, X(t_n), Y(t'_1), \dots, Y(t'_m)$$

فرآیند مختلط $Z(t)=X(t)+jY(t)$ برحسب خصوصیات آماری توأم فرآیندهای حقیقی $X(t)$ و $Y(t)$ توصیف و مشخص می‌شود .

فرآیند برداری (فرآیند n بعدی) خانواده ای از n فرآیند تصادفی است . خود بستگی فرآیند حقیقی یا مختلط $X(t)$ بنا به تعریف متوسط حاصل ضرب $X(t_1)X^*(t_2)$ است .

این تابع را با $R(t_1, t_2)$ یا $R_x(t_1, t_2)$ یا $R_{xx}(t_1, t_2)$ نمایش می‌دهند بنابراین

$$R_{xx}(t_1, t_2)=E\{X(t_1)X^*(t_2)\} \qquad (۵-۱۵)$$

که در آن عبارت مزدوج در ارتباط با متغیر دوم $R_{xx}(t_1, t_2)$ می‌باشد . می‌توان نتیجه گرفت که

$$R(t_2, t_1) = E\{X(t_2)X^*(t_1)\}=R^*(t_1, t_2) \qquad (۵-۱۶)$$

به علاوه توجه داریم که

$$R(t, t)=E\{|X(t)|^2\}\ge 0 \qquad (۵-۱۷)$$

دو معادلهٔ اخیر موارد خاصی از خاصیت زیر است خود بستگی (هم بستگی) $R(t_1, t_2)$ فرآیند تصادفی $X(t)$ یک تابع مثبت معین Positive Definite (P.D) است.

به این معنی که به ازاء هر a_i و a_j داریم

$$\sum_{ij} a_i a_j^* R(t_i , t_j) \geq 0 \qquad (۵-۱۸)$$

این رابطه نتیجه‌ای از تساوی زیر است

$$0 \leq E\left\{\left|\sum_i a_i X(t_i)\right|^2\right\} = \sum_{i,j} a_i a_j^* E\left\{X(t_i)X^*(t_j)\right\}$$

بعداً نشان خواهیم داد که عکس این مطلب نیز صحیح است

یعنی برای یک تابع مثبت معین $R(t_1 , t_2)$ مشخص می‌توانیم

فرآیندی مانند $X(t)$ را بیابیم که دارای تابع خودبستگی $R(t_1 , t_2)$ باشد

مثال ۴-۵

(الف) اگر $X(t)=ae^{j\omega t}$ باشد در آن صورت

$$R(t_1 , t_2)=E\left\{ae^{j\omega t_1} a^* e^{-j\omega t_2}\right\}=E\left\{|a|^2\right\} e^{j\omega(t_1-t_2)}$$

خواهد بود.

(ب) فرض کنید که متغیرهای تصادفی a_i

ناهم بسته با متوسط صفر و واریانس σ_i^2 باشند . اگر

$$X(t)=\sum_i a_i e^{j\omega_i t}$$

باشد با استناد به (۵-۱۵) می‌توان نتیجه گرفت که

$$R(t_1 , t_2)=\sum_i \sigma_i^2 e^{j\omega_i (t_1-t_2)}$$

اتوکوواریانس (یا کوواریانس) $C(t_1 , t_2)$ فرآیند $X(t)$ در واقع کوواریانس

متغیرهای تصادفی $X(t_1)$ و $X(t_2)$ است .

$$C(t_1 , t_2) = R(t_1 , t_2) - \eta(t_1)\eta^*(t_2) \qquad (۵-۱۹)$$

به طوری که $\eta(t) = E[X(t)]$ متوسط $X(t)$ است . نسبت

$$r(t_1 , t_2) = \frac{C(t_1 , t_2)}{\sqrt{C(t_1 , t_1)\, C(t_2 , t_2)}} \qquad (۵-۲۰)$$

را ضریب هم بستگی فرآیند $X(t)$ نامند .

قابل توجه است که اتوکوواریانس $C(t_1 , t_2)$ فرآیند $X(t)$ تابع خودبستگی

فرآیند تمرکز یافته (Centered Process) (انحراف از میانگین)

$$\tilde{X}(t) = X(t) - \eta(t)$$

بوده و در نتیجه تابع مثبت معین (P.D.) است . هم چنین ضریب هم بستگی

$r(t_1 , t_2)$ فرآیند $X(t)$ اتوکوواریانس فرآیند نرمالیزه شده

$$X(t) / \sqrt{C(t , t)}$$

می‌باشد پس این ضریب نیز تابع P.D. خواهد بود .

$$|r(t_1 , t_2)| \leq 1 \quad , \quad r(t , t) = 1 \qquad (۵-۲۱)$$

مثال (۵-۵)

اگر $S=\int_a^b X(t)\,dt$ باشد در آن صورت $S-\eta_s=\int_a^b \tilde{X}(t)\,dt$ خواهد بود

که در آن $\tilde{X}(t)=X(t)-\eta_x(t)$ است .

از طرف دیگر می‌دانیم که

$$E\{|S|^2\}=E\{SS^*\}=\int_a^b\int_a^b E\{X(t_1)X^*(t_2)\}\,dt_1dt_2=$$

$$=\int_a^b\int_a^b R(t_1,t_2)\,dt_1dt_2$$

می‌باشد . با استناد به نکات مطروحه در رابطه با اتوکوواریانس فرآیند تصادفی می‌توان نتیجه گرفت که

$$\sigma_s^2=E\{|S-\eta_s|^2\}=E\left[\int_a^b\tilde{X}(t_1)dt_1\int_a^b\tilde{X}(t_2)dt_2\right]=\int_a^b\int_a^b C_x(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2$$

هم بستگی دو فرآیند $X(t), Y(t)$ تابع زیر است

$$R_{xy}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)Y^*(t_2)\}=R^*_{yx}(t_2,t_1) \qquad (۵-۲۲)$$

به نحو مشابه می‌توان نتیجه گرفت

$$C_{xy}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2)-\eta_x(t_1)\eta_y^*(t_2) \qquad (۵-۲۳)$$

که تابع کوواریانس آن دو فرآیند است .

دو فرآیند $X(t)$, $Y(t)$ هنگامی (متقابلاً) متعامد هستند که

به ازاء تمام مقادیر t_1 ، t_2

$$R_{xy}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X^*(t_2)\}=0 \qquad (۵-۲۴)$$

دو فرآیند مذکور را زمانی ناهم بسته می‌نامند که

به ازاء تمام مقادیر t_1 ، t_2

$$C_{xy}(t_1,t_2)=E\{\tilde{X}(t_1)\tilde{X}^*(t_2)\}=0 \qquad (۵-۲۵)$$

در حالت کلی ، مقادیر $X(t_1), X(t_2)$ از فرآیند تصادفی $X(t)$ برای هر t_1, t_2 با یکدیگر وابستگی آماری دارند .

به هر صورت در اکثر موارد این وابستگی به ازاء $|t_1-t_2|\to\infty$ کاهش می‌یابد . این امر منجر به مفهوم فرایند تصادفی وابسته -a می‌گردد . فرایند تصادفی $X(t)$ را هنگامی وابسته -a می‌نامند که تمام مقادیر $X(t)$ به ازاء $t<t_0$, $t>t_0+a$ متقابلاً مستقل باشند .

بنابراین

$$C(t_1,t_2)=0 \;,\quad |t_1-t_2|>a \qquad (۵-۲۶)$$

فرآیند $X(t)$ را هنگامی هم بسته -a (یا وابسته -a هم بستگی) نامند که تابع خود بستگی (هم بستگی) آن در رابطه (۵-۲۶) صدق کند .

واضح است که اگر $X(t)$ فرایند هم بسته -a باشد آن گاه هر ترکیب خطی از مقادیر آن برای $t<t_0$ با هر ترکیب خطی از مقادیر فرآیند به ازاء $t>t_0+a$ ناهم بسته خواهد بود .

فرآیند $\gamma(t)$ را زمانی می توان فرآیند نویز سفید نامید که مقادیر $\gamma(t_i)\,\gamma(t_j)$ آن به ازاء تمام مقادیر $t_i\neq t_j$ با یکدیگر نا هم بسته باشند

$$C(t_i,t_j)=0 \;,\qquad t_i\neq t_j$$

همچنان که بعداً توضیح داده خواهد شد تابع کوواریانس فرآیند نویز سفید در حالت کلی به شکل زیر خواهد بود

$$C(t_1,t_2)=q(t_1)\,\delta(t_1-t_2) \qquad q(t)\geq 0$$

اگر متغیرهای تصادفی $\gamma(t_i)$, $\gamma(t_j)$ نه تنها ناهم بسته بلکه مستقل باشند ، آن گاه $\gamma(t)$ نویز اکیداً سفید نامیده می‌شود . غیر از مواردی که به صراحت ذکر شود ، متوسط فرآیند نویز سفید صفر فرض خواهد شد .

مثال ۶ – ۵

فرض کنید که $\gamma(t)$ نویز سفید است ، $X(t)=\int_0^t \gamma(\alpha)\,d\alpha$ می باشد . می‌توان نوشت

$$E\{X^2(t)\}=\int_0^t\int_0^t E\{\gamma(t_1)\gamma(t_2)\}\,dt_1dt_2=$$

$$=\int_0^t\int_0^t C(t_1,t_2)\,dt_1dt_2=\int_0^t\int_0^t q(t_1)\delta(t_1-t_2)\,dt_1dt_2=\int_0^t q(t_1)\,dt_1$$

زیرا داریم $0<t_1<t$ ، $\int_0^t \delta(t_1-t_2)\,dt_2=1$

اگر نموهای $X(t_2)-X(t_1), X(t_4)-X(t_3)$ از فرآیند $X(t)$ ناهم بسته (مستقل) برای هر $t_1<t_2<t_3<t_4$ باشند ، آن‌گاه گوییم که $X(t)$ یک فرآیند با نموهای ناهم بسته (مستقل) است . فرآیند پواسون فرآیندی با نموهای مستقل است . انتگرال نویز سفید که در مثال ۶-۵ مطرح شد فرآیندی با نموهای ناهم بسته است .

اگر دو فرآیند $X(t)$, $Y(t)$ به نحوی باشند که متغیرهای تصادفی

$$y(t_1'),\dots,y(t_n'),x(t_1),\dots,x(t_n)$$

متقابلاً مستقل باشند ، آن گاه این فرآیندها را مستقل نامند .

فرآیند $X(t)$ را هنگامی نرمال می‌نامند که متغیرهای تصادفی $X(t_1),\dots,X(t_n)$ به ازاء هر مقدار n ، $t_1,\dots,t_n$ تواماً نرمال باشند .

خصوصیات آماری فرآیند نرمال به طور کامل برحسب تابع متوسط $\eta(t)$ و تابع کوواریانس $C(t_1,t_2)$ آن قابل تعیین است .

در واقع از آنجا که

$$E\{X(t)\}=\eta(t)\,,\ \sigma_x^2(t)=C(t,t)$$

است ، نتیجه می‌گیریم که تابع چگالی احتمال مرتبهٔ اول $X(t)$ یعنی $f(x,t)$ تابع چگالی نرمال $N[\eta(t),\sqrt{C(t,t)}]$ است .

مشابهاً از آنجا که تابع $r(t_1,t_2)$ در رابطه (۲۰ – ۵) ضریب هم بستگی متغیرهای تصادفی $X(t_1),X(t_2)$ است ، چگالی مرتبهٔ دوم $f(x_1,x_2,t_1,t_2)$ فرآیند $X(t)$ تابع چگالی تواماً نرمال زیر است

$$N[\eta(t_1),\eta(t_2),\sqrt{C(t_1,t_1)},\sqrt{C(t_2,t_2)},r(t_1,t_2)]$$

تابع مشخصه مرتبهٔ n فرآیند $X(t)$ عبارت است از

$$\exp\Big\{j\sum_i \eta(t_i)\omega_i-\frac{1}{2}\sum_{i,k}C(t_i,t_k)\,\omega_i\omega_k\Big\} \qquad (۵-۲۸)$$

معکوس تابع مشخصه فوق تابع چگالی احتمال مرتبه n فرآیند $X(t)$ یعنی $f(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)$ است .

در اینجا به قضیهٔ وجود Existence Theorem می پردازیم.

فرض کنید تابع دلخواه $\eta(t)$ و تابع $C(t_1,t_2)$ مثبت معین در دست است .

می‌توانیم فرآیندی نرمال با میانگین $\eta(t)$, کوواریانس $C(t_1,t_2)$ تشکیل دهیم .

اگر در رابطه (۲۸ – ۵) از توابع دادهٔ شدهٔ $C(t_1,t_2)$, $\eta(t)$ استفاده کنیم ، معکوس تابع مشخصه نیز یک چگالی است زیرا که تابع $C(t_1,t_2)$ بنا به فرض مثبت معین است.

مثال ۷ – ۵

فرض کنید که $X(t)$ یک فرآیند نرمال به صورت زیر باشد:

$$\eta(t) = 3 \quad , \qquad C(t_1, t_2) = 4e^{-0/2\,|t_1 - t_2|}$$

الف) احتمال این که $X(5) < 2$ باشد را بیابید

واضح است که $X(5)$ متغیر تصادفی نرمال با متوسط $\eta(t) = 3$,

واریانس $C(5,5) = 4$ است. پس

$$P\{X(5) \le 2\} = G\left(-\frac{1}{2}\right) = ./309$$

ب) احتمال این که $|X(8) - X(5)| \le 1$ باشد ، را بیابید .

اختلاف $S = X(8) - X(5)$ یک متغیر تصادفی نرمال با متوسط

$\eta(8) - \eta(5) = 0$ واریانس

$$C(8,8) + C(5,5) - 2C(8,5) - 8(1 - e^{-0/6}) = 3/608$$

است . بنابراین

$$P\{ X(8) - X(5) \le 1\} = 2G\left(\frac{1}{1/9}\right) - 1 = 0/4$$

فرآیند نقطه ای (point) مجموعه ای از نقاط تصادفی t_i روی محور زمان است.

به هر فرآیند نقطه‌ای می‌توان یک فرآیند تصادفی $X(t)$ که برابر با تعداد نقاط t_i در بازهٔ $(0, t)$ می‌باشد نسبت دارد .

به عنوان مثال فرآیند پواسون را می‌توان نام برد .

به هر فرآیند نقطه ای t_i می‌توانیم یک دنباله از متغیرهای تصادفی Z_n را به نحوی نسبت دهیم که

$$Z_1 = t_1 \;\text{و}\; Z_2 = t_2 - t_1, \ldots, Z_n = t_n - t_{n-1}$$

که t_1 اولین نقطهٔ تصادفی در طرف راست مبداء است . این دنباله را فرآیند تجدید (Renewal) می‌نامند .

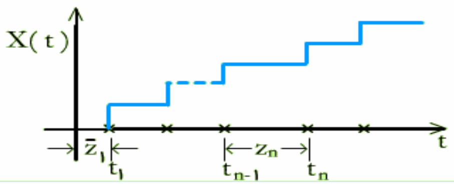
در این مورد Z_i کل زمانی است که i اُمین لامپ در حال کار بوده و t_i زمان سوختن آن است .

بنابراین تناظری بین سه مفهوم زیر برقرار کرده ایم (شکل ۳ – ۵)

الف) فرآیند نقطه ای t_i

ب) فرآیند تصادفی حالت گسسته $X(t)$ که با پله های واحد در نقاط t_i افزایش می یابد.

ج) فرآیند تجدید شامل متغیر های تصادفی Z_i به نحوی که $t_n = z_1 + \ldots + z_n$ باشد.



t_n : فرایند نقطه ای

z_n : فرایند تجدید

$t_n = z_1 + \ldots\ldots + z_n$

شکل ۳–۵

فرآیندهای ایستان

فرآیند تصادفی $X(t)$ را هنگامی فرآیند ایستان به مفهوم اکید (یا ایستان اکید) (SSS) (Strict _ Sense Stationary) می‌توان نامید که خواص آماری آن نسبت به جابه‌جایی مبدأ زمان تغییر ناپذیر باشد .

به عبارت دیگر فرآیندهای $X(t + c)$ و $X(t)$ به ازاء هر مقدار c ، خصوصیات آماری یکسان داشته باشند .

اگر خصوصیات آماری توأم دو فرآیند $X(t)$ و $Y(t)$ با خصوصیات آماری توأم فرآیندهای $X(t + c)$ و $Y(t + c)$ به ازاء هر مقدار c برابر باشد ، این دو فرآیند $X(t)$ و $Y(t)$ را توأماً ایستان گویند . فرآیند مختلط $Z(t) = X(t) + iY(t)$ را هنگامی ایستان نامیم که فرآیندهای $X(t)$ و $Y(t)$ توأماً ایستان باشند

با توجه به تعریف فوق ، می‌توان گفت که چگالی مرتبهٔ n فرآیند ایستان اکید باید به ازاء هر مقدار c در شرط زیر صدق کند .

$$f(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = f(x_1, \ldots, x_n; t_1 + c, \ldots, t_n + c) \qquad (۵-۲۹)$$

از مفهوم فوق نتیجه می‌شود که به ازاء هر مقدار c ، $f(x;t) = f(x;t+c)$ می‌باشد . بنابراین چگالی مرتبهٔ اول $X(t)$ مستقل از t است .

$$f(x;t) = f(x) \qquad (۵-۳۰)$$

مشابهاً ، به ازاء هر مقدار c ، به خصوص به ازاء $c = -t_2$ ، $f(x_1, x_2; t_1+c, t_2+c)$ مستقل از c است . پس

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; \tau) \qquad \tau = t_1 - t_2 \qquad (۵-۳۱)$$

بنابراین چگالی توأم متغیرهای تصادفی $X(t+\tau)$, $X(t)$ مستقل از t بوده و برابر $f(x_1, x_2; \tau)$ می‌باشد .

فرآیند تصادفی $X(t)$ را هنگامی ایستان به مفهوم وسیع (ضعیف) (Wide Sense Stationary)(WSS) می‌نامیم که تابع متوسط آن ثابت بوده

$$E\{X(t)\} = \eta \qquad (۵-۳۲)$$

فصل ۵ : فرآیندهای تصادفی

و تابع خودبستگی آن فقط به $\tau = t_1 - t_2$ بستگی داشته باشد

$$E\{X(t+\tau)X^*(t)\} = R(\tau) \qquad (۵-۳۳)$$

چون τ فاصلهٔ از t تا $t+\tau$ است تابع $R(\tau)$ را می‌توان به شکل متقارن زیر نوشت

$$R(\tau) = E\left\{X\left(t+\tfrac{\tau}{2}\right)X^*\left(t-\tfrac{\tau}{2}\right)\right\} \qquad (۵-۳۴)$$

به خصوص باید توجه کرد که $E\{|x(t)|^2\} = R(0)$ است یعنی توان متوسط فرآیند ایستان مستقل از t بوده و برابر $R(0)$ می‌باشد.

مثال ۸ – ۵

فرض کنید که $X(t)$ فرآیندی WSS با تابع خود بستگی $R(\tau) = A e^{-\alpha|\tau|}$ است. گشتاور دوم متغیر تصادفی $X(8)-X(5)$ را تعیین خواهیم کرد. واضح است که

$$E\{[X(8)-X(5)]^2\} =$$

$$E\{X^2(8)\} + E\{X^2(5)\} - 2E\{X(8)X(5)\}$$

$$= R(0) + R(0) - 2R(3) = 2A - 2Ae^{-3\alpha}$$

مثال ۸–۵ نشان می‌دهد که تابع خود بستگی فرآیند ایستان $X(t)$ را می‌توان به عنوان توان متوسط تعریف کرد . اگر به منظور سادگی ، فرض کنیم $X(t)$ حقیقی است با استناد به (۳۳- ۵) می‌توان نتیجه گرفت

$$E\{[X(t+\tau)-X(t)]^2\} = 2[R(0)-R(\tau)] \qquad (۵-۳۵)$$

هم چنین با توجه به رابطهٔ (۳۳-۵) ملاحظه می‌شود که تابع کوواریانس فرآیند WSS فقط به $\tau = t_1 - t_2$ بستگی دارد

$$C(\tau) = R(\tau) - |\eta|^2 \qquad (۵-۳۶)$$

و ضریب همبستگی آن برابر است با

$$r(\tau) = \frac{C(\tau)}{C(0)} \qquad (۵-۳۷)$$

بنابراین $C(\tau)$ کوواریانس و $R(\tau)$ ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی $X(t)$ و $X(t+\tau)$ است.

دو فرآیند $X(t)$ و $Y(t)$ را هنگامی‌تواماً ایستان به مفهوم ضعیف (WSS) می‌نامند که یکایک آنها (WSS) بوده و علاوه بر آن هم‌بستگی متقابل آنها فقط به $\tau = t_1 - t_2$ بستگی داشته باشد

$$R_{xy}(\tau) = E\{X(t+\tau)Y^*(t)\}$$
$$C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - \eta_x\eta_y^* \qquad (۵-۳۸)$$

اگر $X(t)$ فرآیند نویز سفید (WSS) باشد در آن صورت $C(\tau) = q\,\delta(\tau)$ خواهد بود .

اگر $X(t)$ یک فرآیند وابسته -a باشد ، آن گاه برای $|\tau| > a$ ، $C(\tau) = 0$ می‌باشد . در این حالت ، ثابت a را زمان هم بستگی $X(t)$ می‌نامند .
این عبارت نیز برای فرآیندهای دلخواه به کار رفته و به صورت نسبت زیر تعریف می‌شود .

$$\tau_c = \frac{1}{C(0)}\int_0^\infty C(\tau)d\tau \qquad (۵-۳۹)$$

به طور کلی به ازاء هر مقدار τ ، $C(\tau) \neq 0$ است ولی برای اغلب فرآیندهای عادی می‌توان گفت که

فصل ۵ : فرآیندهای تصادفی

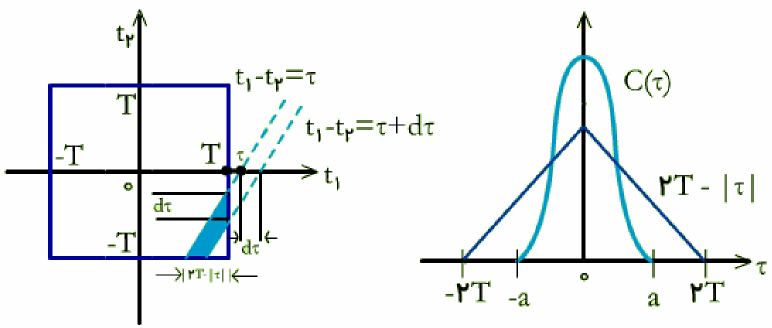
$$C(\tau) \xrightarrow[|\tau|\to\infty]{} 0 \qquad \text{و} \qquad R(\tau) \xrightarrow[|\tau|\to\infty]{} |\eta|^2$$

مثال ۹-۵

اگر $X(t)$ فرآیند (WSS) بوده و $S = \int_{-T} X(t)dt$ باشد در آن صورت نشان دهید که

$$\sigma_S^2 = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(t_1-t_2)\,dt_1dt_2 = \int_{-2T}^{2T}(2T-|\tau|)\,C(\tau)\,d\tau \qquad (۵-۴۰)$$

با توجه به شکل ۴-۵ و با تغییر متغیر $t_1 - t_2 = \tau$ می‌توان نوشت (با استناد به نتیجهٔ بدست آمده در مثال ۵-۵)



شکل (۵-۴)

$$\sigma_S^2 = \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(t_1-t_2)\,dt_1dt_2 = \int_0^{2T} C(\tau)\sqrt{2}\,[2T-\tau]\frac{d\tau}{\sqrt{2}} + \int_{-2T}^{0} C(\tau)\sqrt{2}\,[2T+\tau]\frac{d\tau}{\sqrt{2}} = \int_{-2T}^{2T} C(\tau)[2T-|\tau|]\,d\tau$$

موارد خاص : (الف) اگر $C(\tau)=q\,\delta(\tau)$ باشد در آن صورت

$$\sigma_s^2 = q\int_{-2T}^{2T}(2T-|\tau|)\delta(\tau)\,d\tau = 2Tq$$

(ب) اگرفرآیند $X(t)$ فرآیند وابسته a- , $a \ll T$ باشد در آن صورت می‌توان گفت‌که

$$\sigma_s^2 = \int_{-2T}^{2T}(2T-|\tau|)\,C(\tau)d\tau \simeq 2T\int_{-a}^{a}C(\tau)d\tau$$

نتیجه فوق نشان می‌دهد که در محاسبهٔ واریانس S به جای فرآیند وابستهٔ a- با $a \ll T$ می‌توان از نویز سفید با پارامتر $q=\int_{-a}^{a}C(\tau)d\tau$ استفاده نمود .

اگر فرآیند SSS باشد در آن صورت WSS نیز خواهد بود . به هرحال عکس این مطلب به طور کلی صحیح نیست .

فرآیندهای نرمال در این مورد استثنای با اهمیتی هستند.

در واقع ، فرض کنید که $X(t)$ فرآیندی WSS نرمال با متوسط η و کواریانس $C(\tau)$ است .

همان گونه که در رابطهٔ (۵-۲۸) ملاحظه کردیم تابع مشخصهٔ مرتبهٔ n آن برابر است با

$$\exp\left\{ j\eta\sum_i \omega_i - \frac{1}{2}\sum_{i,k} C(t_i-t_k)\,\omega_i\,\omega_k \right\} \tag{۵-۴۱}$$

این تابع نسبت به جابه‌جایی مبدا تغییر ناپذیر است. و از آنجا که تابع مذکور به طور کامل خصوصیات آماری $X(t)$ را تعیین می‌کند نتیجه می‌گیریم که $X(t)$ فرآیندی SSS است.

مثال ۱۰-۵ :

در این مثال شرایط لازم و کافی برای ایستان بودن فرآیند $X(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t$ را تعیین می‌کنیم.

متوسط این فرآیند برابر است با

$$E\{X(t)\}=E\{a\}\cos\omega t+E\{b\}\sin\omega t$$

این تابع باید مستقل از t باشد . بنابراین شرط

$$E\{a\}=E\{b\}=0 \tag{۵-۴۲}$$

شرط لازم برای هر دو شکل ایستان بودن می‌باشد .

فرض می‌کنیم که این شرط اقناع می‌شود

i) مفهوم ضعیف : فرآیند $X(t)$ هنگامی WSS است که اگر و فقط اگر متغیرهای تصادفی a و b نا هم بسته بوده و واریانس یکسان زیر را داشته باشند.

$$E\{ab\}=0\ ,\ E\{a^2\}=E\{b^2\}=\sigma^2 \tag{۵-۴۳}$$

اگر شرایط فوق برقرار باشد در آن صورت

$$R(\tau)=\sigma^2\cos\omega\tau \tag{۵-۴۴}$$

برای اثبات می‌توان گفت که به ازاء $X(t)$ به عنوان فرآیند WSS داریم

$$E\{X^2(0)\}=E\{X^2(\pi/2\omega)\}=R(0)$$

ولی $X(0)=a$ و $X(\pi/2\omega)=b$ بوده و بنابراین

$$E\{a^2\}=E\{b^2\}$$

با استفاده از نتایج فوق می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} E\{X(t+\tau)X(t)\} &= \\ E\{[a\cos\omega(t+\tau)&+b\sin\omega(t+\tau)][a\cos\omega t+b\sin\omega t]\} \\ &=\sigma^2\cos\omega\tau+E\{ab\}\sin\omega(2t+\tau) \end{aligned} \tag{۵-۴۵}$$

عبارت حاصله بالا هنگامی مستقل از t خواهد بود که $E\{ab\}=0$ باشد و رابطه (۵-۴۳) به دست می‌آید .

بالعکس اگر رابطه (۵-۴۳) برقرار باشد ، همان طور که رابطه (۵-۴۵) نشان می دهد ، تابع خود بستگی $X(t)$ با $\sigma^2\cos\omega\tau$ برابر شده و در نتیجه فرآیندی $X(t)$ WSS خواهد بود

ii) مفهوم اکید:

فرآیند $X(t)$ هنگامی SSS است که اگر و فقط اگر چگالی توأم $f(a,b)$ متغیرهای تصادفی a و b دارای تقارن دایره ای باشد یعنی اگر

$$f(a,b) = f(\sqrt{a^2+b^2}) \qquad \text{(۵-۴۶)}$$

برای اثبات باید گفت که اگر $X(t)$ فرآیندی SSS است .

در آن صورت متغیرهای تصادفی $X(0)=a$ و $X(\pi/2\omega)=b$ و متغیرهای تصادفی $X(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t$ و $X(t+\pi/2\omega)= b\cos\omega t- a\sin\omega t$ به ازاء هر مقدار t دارای چگالی توأم یکسان می‌باشند . بنابراین $f(a,b)$ باید دارای تقارن دایره‌ای باشد

اکنون نشان می‌دهیم که اگر $f(a,b)$ دارای تقارن دایره‌ای باشد در آن صورت $X(t)$ فرآیندی SSS است.

به ازاء یک مقدار مفروض برای τ و

$$a_1 = a\cos\omega\tau + b\sin\omega\tau \quad \text{و} \quad b_1 = b\cos\omega\tau - a\sin\omega\tau$$

فرآیند زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$X_1(t) = a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t = X(t+\tau)$$

واضح است که خصوصیات آماری $X(t)$ و $X_1(t)$ برحسب چگالی‌های توأم $f(a,b)$ و $f(a_1,b_1)$ متغیرهای تصادفی a و b و a_1 و b_1 تعیین می‌شود.

معذالک متغیرهای تصادفی a و b و a_1 و b_1 دارای چگالی توام یکسان هستند.

بنابراین فرآیندهای $X(t)$ و $X(t+\tau)$ به ازاء هر τ خصوصیات آماری یکسانی را دارا می باشند.

شایسته است در اینجا به نکته ای اشاره کرده و بگوییم که اگر فرآیند $X(t)$ فرآیندی SSS بوده و متغیرهای تصادفی a و b مستقل باشند در آن صورت آنها نرمال هستند.

چون به‌علت SSS بودن فرآیند $X(t)$ باید چگالی توأم $f(a,b)$ تقارن دایره ای داشته باشد.

می‌توان به سهولت نشان داد که اگر دو متغیر تصادفی مستقل دارای چگالی توأم با تقارن دایره ای باشند ، آن دو متغیر تصادفی نرمال با متوسط صفر و واریانس یکسان می باشند.

مثال ۱۱-۵

فرض کنید متغیر تصادفی ω با چگالی $f(\omega)$ و متغیر تصادفی φ با توزیع یکنواخت دربازه $(-\pi,\pi)$ و مستقل از ω در دست است . فرآیند

$$X(t)=a\cos(\omega t+\varphi) \qquad \text{(۵-۴۷)}$$

را تشکیل می‌دهیم . می‌خواهیم نشان دهیم که $X(t)$ فرآیندی WSS است.

برای اثبات باید گفت

$$E\{\cos(\omega t+\varphi)\} = E\{E\{\cos(\omega t+\varphi)/\omega\}\}$$

با توجه به استقلال ω و φ داریم

$$E\{\cos(\omega t+\varphi)/\omega\} = \cos\omega t\, E\{\cos\varphi\} - \sin\omega t\, E\{\sin\varphi\}$$

بنابراین $E\{X(t)\}=0$ است چون

$$E\{\cos\varphi\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi\, d\varphi = 0$$

و

$$E\{\sin\varphi\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 0$$

با همان استدلال

$$E\{\cos(2\omega t+\omega\tau+2\varphi)\} = 0$$

بوده و از آنجا که

$$2\cos[\omega(t+\tau)+\varphi]\cos(\omega t+\varphi)=\cos\omega\tau+\cos(2\omega t+\omega\tau+2\varphi)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$R(\tau)=a^2E\{[\cos\omega(t+\tau)+\varphi]\cos(\omega t+\varphi)\}=$$
$$\frac{a^2}{2}E\{\cos\omega\tau\}=\frac{a^2}{2}R_e\Phi_\omega(\tau)$$

که در آن

$$\Phi_\omega(\tau)=E\{e^{j\omega\tau}\}=E\{\cos\omega\tau\}+jE\{\sin\omega\tau\}$$

تابع $\Phi_\omega(\tau)$ تابع مشخصه متغیر تصادفی ω است.
علاوه بر این به ازاء متغیرهای داده شده ω و φ فرآیند

$$Z(t)=ae^{j(\omega t+\varphi)}$$

را می‌توان گفت که فرآیندی
WSS با متوسط صفر و تابع خود بستگی زیر است.

$$E\{Z(t+\tau)Z^*(t)\}=a^2E\{e^{j\omega\tau}\}=a^2\Phi_\omega(\tau)$$

حال فرآیند $X(t)$ با متوسط $\eta(t)$ و کوواریانس $C_x(t_1,t_2)$ را در نظر بگیرید.
فرآیند تفاضل زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\tilde{X}(t)=X(t)-\eta(t) \qquad (5-48)$$

این فرآیند انحراف از متوسط را فرآیند تمرکز یافته متناظر با فرآیند $X(t)$ نامند.
قابل توجه است که

$$E\{\tilde{X}(t)\}=0\ ,\quad R_{\tilde{x}}(t_1,t_2)=C_x(t_1,t_2)$$

با توجه به روابط بالا می‌توان گفت که اگر فرآیند $X(t)$ از نظر کوواریانس ایستان باشد یعنی اگر $C_x(t_1,t_2)=C_x(t_1-t_2)$ باشد درآن صورت $\tilde{X}(t)$ یا فرآیند تمرکز یافته آن فرآیندی WSS است.

در پایان این بخش به اشکال دیگر ایستان بودن می‌پردازیم.
اگر خصوصیات آماری متغیرهای تصادفی $X(t_1+c),\dots,X(t_n+c)$ به ازاء

c بزرگ به c بستگی نداشته باشد و یا دقیق‌تر بگوییم اگر تابع $f(x_1,\dots,x_n;t_1+c,\dots,t_n+c)$ به‌ازاء $c\to\infty$ به مقدار حدی میل کند (مقدار حدی به c بستگی نداشته باشد) در آن صورت فرآیند $X(t)$ را ایستان مجانبی نامند. سیگنال نیمه تصادفی تلگراف مثالی از این نوع فرآیند است.
فرآیند $X(t)$ را هنگامی ایستان مرتبه N گوییم که رابطه (۲۹-۵) به ازاء هر مقدار n برقرار نبوده بلکه فقط به ازاء $n\le N$ اقناع شود.

فرآیند $X(t)$ را هنگامی ایستان در یک بازه نامند که رابطه (۲۹-۵) به‌ازاء هر t_i و t_i+c در آن بازه صادق باشد. هنگامی فرآیند $X(t)$ را فرآیندی با نموهای ایستان می‌نامیم که نموهای آن یعنی $Y(t)=X(t+h)-X(t)$ به ازاء هر مقدار h یک فرآیند ایستان را تشکیل دهد. فرآیند پواسون مثالی از این نوع فرآیند می‌باشد.
فرآیند $X(t)$ را زمانی می‌توان متناوب متوسط مربع (متناوب MS) نامید که به ازاء هر مقدار t رابطه زیر برقرار باشد

$$E\{|X(t+T)-X(t)|^2\}=0 \qquad (5-49)$$

با توجه به تعریف فوق می‌توان گفت که برای یک t مشخص

$$X(t+T)=X(t) \qquad (5-50)$$

با احتمال یک است. به‌هرحال نمی‌توان نتیجه گرفت که مجموعه نتایج آزمایش تصادفی یعنی ξ به نحوی است که به ازاء تمام مقادیر t، $X(t+T,\xi)=X(t,\xi)$ با احتمال یک باشد. همان طور که از رابطه (۵۰-۵) مشاهده می‌شود. متوسط فرآیند متناوب MS خود متناوب است. خواص تابع $R(t_1,t_2)$ را در این مرحله از بحث معرفی می‌کنیم.

فرآیند $X(t)$ **فرآیندی متناوب** MS **خواهد بود اگر و فقط اگر تابع خودبستگی آن متناوب مضاعف باشد یعنی به ازاء هر مقدار صحیح** m **و** n

$$R(t_1+mT, t_2+nT) = R(t_1, t_2) \qquad (5\text{-}51)$$

برای اثبات می‌توان به نامساوی شوارتز استناد کرد

$$E^2\{zw\} \le E\{z^2\} E\{w^2\}$$

اگر $Z = X(t_1)\,,\ W = X(t_2+T) - X(t_2)$ **انتخاب شود**

$$E^2\{X(t_1)[X(t_2+T) - X(t_2)]\} \le E\{X^2(t_1)\} E\{[X(t_2+T) - X(t_2)]^2\}$$

حال اگر $X(t)$ **متناوب** MS **باشد عبارت آخر رابطه فوق صفر می‌باشد . با مساوی صفر قرار دادن طرف چپ نامساوی داریم .**

$$R(t_1,t_2+T) - R(t_1,t_2) = 0$$

با اعمال مکرر روش فوق در واقع رابطه (۵-۵۱) اثبات می‌گردد . بر عکس اگر (۵-۵۱) صادق باشد در آن صورت

$$R(t+T, t+T) = R(t+T, t) = R(t,t)$$

$$E\{[X(t+T)-X(t)]^2\} = R(t+T, t+T) + R(t,t) - 2R(t+T,t) = 0$$

و نتیجه می‌گیریم که فرآیند $X(t)$ **فرآیندی متناوب** MS **است.**

۲-۵ انتقال فرآیندهای تصادفی توسط سیستم ها

فرآیند تصادفی $X(t)$ را در نظر بگیرید، بر اساس قاعده ای به هر یک از نمونه‌های آن $X(t, \xi_i)$ تابعی مانند $Y(t, \xi_i)$ را اختصاص می‌دهیم. بنابراین فرآیند دیگری به وجود آورده‌ایم

$$Y(t)=T[X(t)]$$

که نمونه‌های آن توابع $Y(t, \xi_i)$ هستند.

فرآیند $Y(t)$ بوجود آمده به این سبک را می‌توان به عنوان خروجی یک سیستم (تبدیل) با ورودی فرآیند $X(t)$ تلقی کرد.

سیستم بر حسب اپراتور T، یعنی قاعدهٔ ارتباط بین نمونه‌های ورودی $X(t)$ و خروجی $Y(t)$، به نحو کامل مشخص می‌شود.

اگر سیستم فقط بر اساس متغیر t عمل کرده و ξ به عنوان پارامتر منظور شود آن را یقینی می‌نامند.

به این معنی که اگر دو نمونه $X(t, \xi_2)$ و $X(t, \xi_1)$ از ورودی در t یکسان باشند، در آن صورت نمونه‌های متناظر $Y(t, \xi_2)$ و $Y(t, \xi_1)$ خروجی نیز در t با هم برابر خواهند بود.

سیستم را هنگامی تصادفی می‌نامند که T بر اساس دو متغیر t و ξ عمل کند. به این معنی که دو نتیجه رخداد ξ_1 و ξ_2 به نحوی وجود دارد که $X(t, \xi_1)=X(t, \xi_2)$ بوده ولی $Y(t, \xi_1)\neq Y(t, \xi_2)$ باشد.

این طبقه‌بندی مبتنی بر خواص پایانه‌های سیستم است.

اگر سیستم با عناصر فیزیکی‌اش یا به وسیلهٔ یک معادله توصیف شود در آن صورت هنگامی یقینی (تصادفی) است که عناصر یا ضرایب معادله تعریف کنندهٔ آن یقینی (تصادفی) باشد.

در این بررسی فقط سیستم‌های یقینی را در نظر می‌گیریم.

در اصل، خصوصیات آماری خروجی سیستم را می‌توان برحسب خصوصیات آماری ورودی بیان کرد.

به هر حال، در حالت کلی، این کار پیچیده‌ای است.

در بخش‌های زیرین دو مورد خاص مهّم را در نظر می‌گیریم

سیستم های بدون حافظه

سیستم را بدون حافظه گویند اگر خروجی آن با

$$Y(t)=g[X(t)]$$

توصیف شود که در آن $g(x)$ تابعی از x است. بنابراین در یک زمان مفروض $t=t_1$، خروجی $Y(t_1)$ فقط به $X(t_1)$ بستگی داشته و به مقادیر گذشته یا آتی $X(t)$ وابسته نیست.

از این مطلب نتیجه می‌شود که چگالی مرتبهٔ اول $f_y(y\,;t)$ مربوط به $Y(t)$ می‌تواند برحسب چگالی متناظر $f_x(x\,;t)$ مربوط به $X(t)$ مانند مبحث تابع متغیر تصادفی توصیف شود.

علاوه بر آن

$$E\{Y(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_x(x\,;t)dx$$

مشابهاً، از آنجا که $Y(t_1)=g[X(t_1)]$ و $Y(t_2)=g[X(t_2)]$ است، چگالی مرتبهٔ دوم $f_y(y_1,y_2\,;t_1,t_2)$ از $Y(t)$ را می‌توان برحسب چگالی متناظر $f_x(x_1,x_2\,;t_1,t_2)$ از $X(t)$ و با توجه به تبدیل‌های زیر تعیین کرد

$$Y(t_1)=g[X(t_1)]\,,\,......\,,\,Y(t_n)=g[X(t_n)] \qquad (۵-۵۲)$$

حال تصور کنید که ورودی به یک سیستم بدون حافظه فرآیند SSS، $X(t)$ است.

نشان می‌دهیم که خروجی $Y(t)$ حاصله نیز SSS است.

به منظور اثبات، چگالی مرتبهٔ n خروجی $Y(t)$ باید تعیین شود.

پس سیستم معادلات زیر را حل می‌کنیم.

$$g(x_1)=y_1\,,\,......\,,\,g(x_n)=y_n \qquad (۵-۵۳)$$

اگر این سیستم دارای یک جواب منحصربفرد باشد درآن صورت

$$f_y(y_1,....,y_n\,;t_1,......,t_n)=\frac{f_x(x_1,....,x_n;t_1,......,t_n)}{|g'(x_1)\;....\;g'(x_n)|} \qquad (۵-۵۳)$$

با توجه به اینکه $X(t)$ ایستان است پس صورت کسر رابطهٔ (۵-۵۴) نسبت به جابجایی مبدأ زمان تغییر ناپذیر است.

ازآنجا که مخرج کسر به t وابسته نیست، نتیجه می‌گیریم که طرف چپ رابطهٔ مذکور با جایگزینی t_i+c به جای t_i تغییر نمی‌کند. بنابراین $Y(t)$ فرآیندی SSS است.

اگر سیستم معادلات (۵-۵۳) بیش از یک جواب داشته باشد، مشابهاً می‌توان نشان داد که نتیجه‌گیری فوق هم چنان صحیح است. نکات زیر در این رابطه شایان توجه است

۱- اگر $X(t)$ ایستان مرتبهٔ N باشد، در آن صورت $Y(t)$ ایستان مرتبهٔ N خواهد بود.

۲- اگر $X(t)$ در بازه‌ای ایستان باشد، در آن صورت $Y(t)$ در همان بازه ایستان است.

۳- اگر $X(t)$ ایستان WSS باشد در آن صورت امکان دارد $Y(t)$ از نظر هر مفهومی ایستان نباشد.

یک مثال مناسب برای سیستم بدون حافظه، آشکار ساز قانون مربع است که درآن خروجی عبارت است از

$$Y(t)=X^{2}(t)$$

می‌خواهیم چگالی‌های مرتبهٔ اول و دوم خروجی این آشکارساز را تعیین کنیم

اگر $Y>0$ باشد در آن صورت $y = x^2$ دارای دو جواب $\pm\sqrt{y}$ است.

علاوه بر آن $y'(x)=+2\sqrt{y}$ بوده و بنابراین

$$f_y(y;t)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_x(\sqrt{y};t)+f_x(-\sqrt{y};t)]$$

اگر $Y_1>0, Y_2>0$ باشد در آن صورت سیستم معادلات

$$y_1=x_1^2 \quad , \quad y_2=x_2^2$$

دارای چهار جواب $(\pm\sqrt{y_1} \ , \ \pm\sqrt{y_2})$ بوده و علاوه بر آن ژاکوبین آن برابر $\pm 4\sqrt{y_1y_2}$ می‌باشد. پس

$$f_y(y_1,y_2;t_1,t_2)=\frac{1}{4\sqrt{y_1y_2}}\sum f_x(\pm\sqrt{y_1},\pm\sqrt{y_2};t_1,t_2)$$

که آن شامل مجموع چهار عبارت می‌باشد.

قابل توجه است که اگر $X(t)$ فرآیند SSS باشد، در آن صورت $f_x(x;t)=f_x(x)$ مستقل از t بوده و

$$f_x(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_x(x_1,x_2;\tau)$$

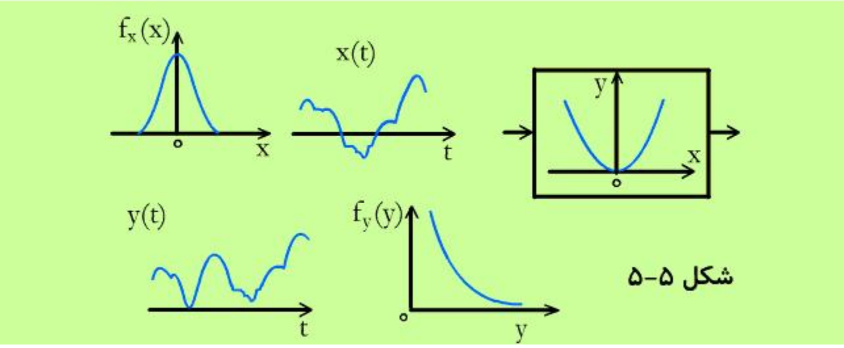
فقط به $\tau=t_1-t_2$ بستگی دارد. بنابراین $f_y(y)$ مستقل از t بوده و $f_y(y_1,y_2;\tau)$ فقط به $\tau=t_1-t_2$ بستگی خواهد داشت

مثال ۱۲-۵

فرض کنید که $X(t)$ فرآیند ایستان نرمال با متوسط صفر و تابع خود بستگی $R_x(\tau)$ است.

در این حالت، $f_x(x)$ نرمال با واریانس $R(0)$ است.

اگر $Y(t)=X^2(t)$ باشد(شکل ۵-۵)



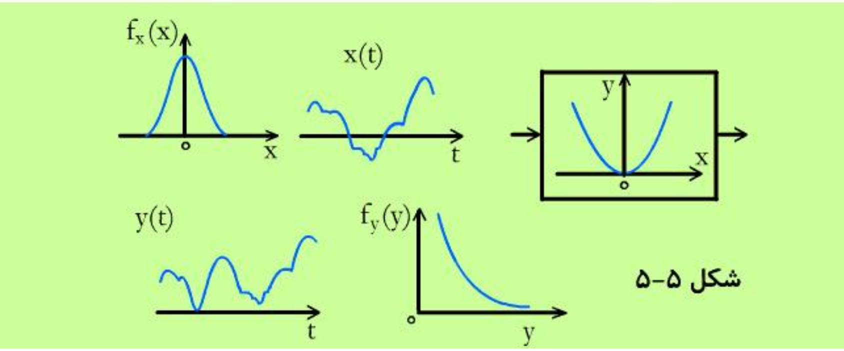
شکل ۵-۵

در آن صورت $E=\{Y(t)\}=R_x(0)$ بوده و

$$f_y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R_x(0)\, y}}\, e^{-y/2R_x(0)}\, U(y)$$

رابطهٔ زیر را می‌خواهیم اثبات کنیم

$$R_y(\tau)=R_x^2(0)+2R_x^2(\tau) \qquad (5\text{-}55)$$



شکل ۵-۵

متغیرهای‌تصادفی $X(t)\,,\,X(t+\tau)$ تواماً نرمال با متوسط صفر هستند.

بنابراین ابتدا نشان می‌دهیم که اگر X و Y دو متغیر تصادفی تواماً نرمال با متوسط صفر باشند رابطهٔ زیرصادق است.

$$E\{X^2Y^2\}=E\{X^2\}E\{Y^2\}+2E^2\{XY\} \qquad (5\text{-}56)$$

می‌دانیم که تابع مشخصهٔ توأم دو متغیرمذکور عبارت است از

$$\Phi(\omega_1,\omega_2)=e^{-(\omega_1^2\sigma_1^2+2r\,\sigma_1\sigma_2\,\omega_1\omega_2+\omega_2^2\sigma_2^2)/2}$$

پس تابع مولد گشتاور X,Y عبارت است از

$$\Phi(s_1,s_2)=e^{-A}$$

$$A=\frac{1}{2}(\sigma_1^2 s_1^2+2c\, s_1 s_2+\sigma_2^2 s_2^2)$$

که در آن $C=E\{XY\}=r\,\sigma_1\,\sigma_2$ اس

از طرف دیگر با استفاده از بسط توابع نمایی و خاصیت خطی امید ریاضی می‌توان نوشت

$$\Phi(s_1, s_2) = E\{e^{s_1X+s_2Y}\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{n}\binom{n}{k}E\{X^kY^{n-k}\}s_1^k s_2^{n-k}$$

$$=1+m_{10}s_1+m_{01}s_2+\frac{1}{2}(m_{20}s_1^2+2m_{11}s_2+m_{02}s_2^2)+\cdots \qquad (5\text{-}57)$$

به منظور اثبات رابطهٔ (۵-۵۶) ما ضریب

$$\frac{1}{4!}\binom{4}{2}E\{X^2Y^2\}$$

مربوط به عبارت $s_1^2 s_2^2$ در رابطه(۵-۵۷) را با ضریب عبارت متناظر در بسط e^{-A} مساوی قرار می‌دهیم.

در این بسط عامل $s_1^2 s_2^2$ فقط در عبارت‌های زیر ظاهر می‌شود

$$\frac{A^2}{2}=\frac{1}{8}(\sigma_1^2 s_1^2+2Cs_1s_2+\sigma_2^2 s_2^2)^2$$

$$\frac{1}{4!}\binom{4}{2}E\{X^2Y^2\}=\frac{1}{8}(2\sigma_1^2\sigma_2^2+4C^2)$$

و در نتیجه (۵-۵۶) به دست می‌آید. اکنون با استناد به این رابطه می‌توان نوشت

$$E=\{X^2(t+\tau)X^2(t)\}=E\{X^2(t+\tau)\}E\{X^2(t)\}+2E^2\{X(t+\tau)X(t)\}$$

و رابطهٔ (۵-۵۵) حاصل می‌شود.

به خصوص باید توجه کرد که

$$E=\{Y^2(t)\}=R_y(0)=3R_x^2(0)$$

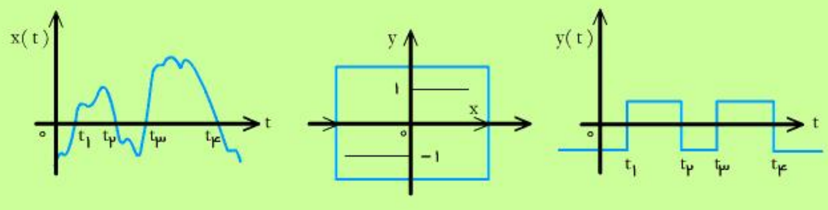
$$\sigma_y^2=2R_x^2(0)$$

اکنون سیستم بدون حافظه محدود کنندهٔ سخت (Hard Limiter)

با تبدیل زیر را در نظر بگیرید

$$g(x)=\begin{cases} 1 , & x>0 \\ -1 , & x<0 \end{cases} \qquad (۵-۵۸)$$

مطابق شکل (۶-۵)

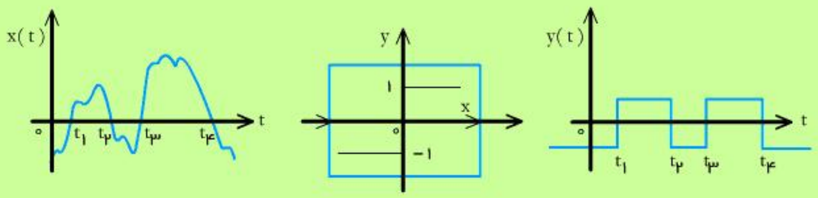


شکل (۶-۵)

خروجی آن مقادیر ±۱ را اختیار کرده و

$$P\{Y(t)=1\} = P\{X(t)>0\} = 1-F_x(0)$$
$$P\{Y(t)=-1\} = P\{X(t)<0\} = F_x(0)$$

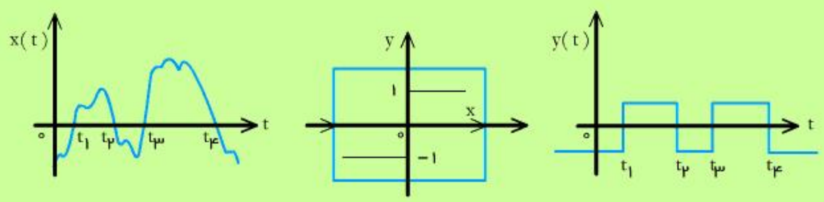
بنابراین



شکل (۶-۵)

$$E\{Y(t)\}=1\times P\{Y(t)=1\}-1\times P\{Y(t)=-1\}=1-2F_x(0)$$

اگر $X(t+\tau)X(t)>0$ باشد حاصلضرب $Y(t+\tau)Y(t)$ برابر یک بوده و در غیر این صورت حاصلضرب مذکور برابر (-۱) خواهد بود.



شکل (۶-۵)

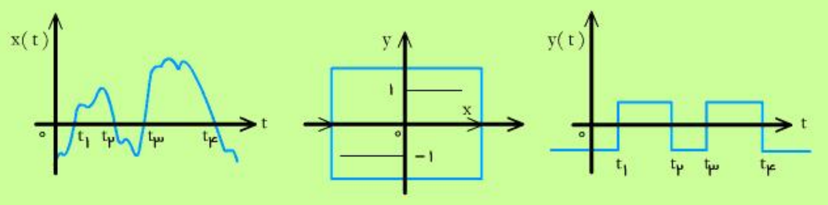
پس

$$R_y(\tau)=P\{X(t+\tau)X(t)>0\}-P\{X(t+\tau)X(t)<0\} \quad (۵-۵۹)$$

بنابراین، در صفحه احتمال متغیرهای تصادفی

$X(t+\tau)$ و $X(t)$ ، تابع $R_y(\tau)$ برابر جرم‌ها در ربع اول و سوم

منهای جرم‌ها در ربع دوم و چهارم است.



شکل (۶-۵)

مثال ۱۳-۵

می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $X(t)$ فرآیند ایستان نرمال با متوسط صفر باشد، در آن صورت تابع خود بستگی خروجی محدود کنندهٔ سخت برابر است با

$$R_y(\tau)=\frac{۲}{\pi}\arcsin\frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \quad (۵-۶۰)$$

این نتیجه به قانون آرک سینوس معروف است.

با استناد به مثال (۵-۳) و استفاده از نتیجهٔ آن ، جرم‌های احتمال

m_1, m_2, m_3, m_4 در چهار ربع صفحه xy

(Y , X دو متغیر تصادفی توأماً نرمال با متوسط صفر هستند)

قابل تعیین هستند .

با توجه به تقارن کروی تابع چگالی احتمال توأم Y,X

می‌توان گفت $m_1 = m_3 \;,\; m_2 = m_4$

بوده و ربع‌های دوم و چهارم ناحیه‌ای از صفحه xy را نشان

می‌دهند که در آن $\frac{x}{y}<0$ است پس

$$m_2+m_4=P(Z\le 0)=F_3(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$m_1+m_3=1-(m_2+m_4)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

اگر

$$\alpha=\arctan\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

را تعریف کنیم

$$m_1 = m_3 = \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2\pi} \quad , \quad m_2 = m_4 = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi}$$

حال از آنجا که متغیرهای تصادفی $X(t+\tau)$ و $X(t)$ توأماً نرمال

با متوسط صفر و واریانس $R_x(0)$ و ضریب هم‌بستگی

$r = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}$ می‌باشند

با استناد به نتایج بالا می‌توان گفت

$$P\{X(t+\tau)X(t)>0\} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\pi} \quad , \quad \sin\alpha = r = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}$$
$$P\{X(t+\tau)X(t)<0\} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi}$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطهٔ (۵-۵۹) داریم

با توجه به تقارن کروی تابع چگالی احتمال توأم Y, X

می‌توان گفت $m_1 = m_3 \; , \; m_2 = m_4$

بوده و ربع‌های دوم و چهارم ناحیه‌ای از صفحه xy را نشان

می‌دهند که در آن $\frac{x}{y} < 0$ است پس

$$m_2 + m_4 = P(Z \le 0) = F_Z(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$
$$m_1 + m_3 = 1 - (m_2 + m_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

اگر

$$\alpha = \arctan\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

را تعریف کنیم

انتگرال فوق تابع $I(\mu)$ بوده و تابعی از کواریانس μ متغیرهای تصادفی

X , Y و چهار پارامتر دیگر توصیف کنندهٔ چگالی توأم $f(x,y)$ می‌باشد.

بنا به قضیهٔ پرایس اگر به ازاء $(x,y)\to\infty$ حاصلضرب $g(x,y)f(x,y)\to 0$

در آن صورت

$$\frac{\partial^n I(\mu)}{\partial \mu^n} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{2n} g(x,y)}{\partial x^n \partial y^n} f(x,y)\,dxdy = E\left(\frac{\partial^{2n} g(X,Y)}{\partial x^n \partial y^n}\right) \quad (5\text{-}62)$$

حال به ازاء τ مشخص، متغیرهای تصادفی $X=X(t)$ و $Z=X(t+\tau)$

متغیرهای تصادفی توأماً نرمال با متوسط صفر و کواریانس

$\mu=E\{XZ\}=R_{xx}(\tau)$ می‌باشند پس

$$I=E\{Zg(X)\}=E\{X(t+\tau)Y(t)\}=R_{xy}(\tau)$$

با استناد به رابطهٔ (۶۲-۵) داریم

$$\frac{\partial I}{\partial \mu}=E\{\frac{\partial^{2}[Zg(X)]}{\partial x \partial 3}\}=E\{g'[X(t)]\}=k \qquad (۵-۶۳)$$

اگر $\mu=0$ باشد متغیرهای تصادفی $X(t)$ و $X(t+\tau)$

مستقل از یکدیگر هستند و در نتیجه $I=0$ خواهد بود.

با گرفتن انتگرال از (۶۳-۵) نسبت به μ رابطهٔ $I=k\mu$

به دست آمده و (۶۱-۵) اثبات می‌شود.

موارد خاص: (الف) (محدود کنندهٔ سخت) فرض کنید که $g(x)=sgn(x)$

(رابطهٔ ۵۸-۵) بوده و بالطبع $g'(x)=2\delta(x)$ خواهد شد.پس

$$K=E\{2\delta(x)\}=2\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=2f(0)$$

که در آن

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi R_{xx}(0)}}\exp\{-\frac{x^{2}}{2R_{xx}(0)}\}$$

چگالی مرتبهٔ اول $X(t)$ است. با جایگذاری آن (K) در رابطهٔ (۶۱-۵) داریم

$$R_{xy}(\tau)=R_{xx}(\tau)\sqrt{\frac{2}{\pi R_{xx}(0)}}\ ,\quad Y(t)=sgn\,X(t) \qquad (۵-۶۴)$$

(ب) (محدود کننده) فرض کنید که $Y(t)$ خروجی محدود کنندهٔ زیر است

$$g(x)=\begin{cases} x & , |x|<c \\ c & , |x|>c \end{cases} \quad , \quad g'(x)=\begin{cases} 1 & , |x|<c \\ 0 & , |x|>c \end{cases}$$

در این حالت

$$K=\int_{-c}^{c}f(x)dx=2G(\frac{c}{\sqrt{R_{xx}(0)}})-1 \qquad (۵-۶۴)$$

سیستم های خطی

نماد

$$Y(t)=L[X(t)] \quad (۵-۶۶)$$

نشان می‌دهد که $Y(t)$ خروجی یک سیستم خطی با ورودی $X(t)$ است.

این بدان معنا است که به ازاء هر مقدار $a_1, a_2, X_1(t), X_2(t)$

رابطهٔ زیر برقرار است

$$L[a_1X_1(t)+a_2X_2(t)]=a_1L[X_1(t)]+a_2L[X_2(t)] \quad (۵-۶۷)$$

این همان تعریف آشنای خطی بودن است و نیز شامل حالت متغیر

تصادفی بودن ضرایب a_1 و a_2 می‌گرد

چون فرض کرده‌ایم سیستم یقینی بوده و فقط بر اساس متغیر t عمل می‌نماید.

نکتهٔ قابل توجه آن است که اگر سیستم بر اساس ساختار داخلی آن یا توسط

معادلهٔ دیفرانسیل توصیف شود،

در آن صورت رابطهٔ (۶۷-۵) فقط هنگامی صادق است که $Y(t)$

پاسخ حالت صفر باشد.

پاسخ مربوط به شرایط اولیه (پاسخ ورودی صفر) در نظر گرفته نمی‌شود.

اگر پاسخ سیستم به ورودی $X(t+c)$ برابر $Y(t+c)$ باشد آن را

تغییر ناپذیر با زمان می‌نامند.

در این بررسی فرض می‌کنیم که سیستم‌های خطی مورد مطالعه تغییر ناپذیر

با زمان هستند.

کاملاً آشکار است که خروجی سیستم خطی یک کانوولوشن است

$$Y(t)=X(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha \quad (۵-۶۸)$$

که در آن $h(t)=L[\delta(t)]$ پاسخ ضربه آن است.

در سطور زیرین اغلب سیستم‌ها را توسط رابطهٔ (۶۸-۵) توصیف خواهیم کرد.

به هر صورت، بررسی را با استفاده از نماد عملگری که در (۶۶-۵) استفاده

شده است شروع می‌کنیم تا تاکید گردد که نتایج متعدد

حاصل از قضیهٔ بعدی برای هر سیستم خطی دلخواه که شامل یک یا چند متغیر

باشد نیز برقرار است.

ملاحظات ذیل در واقع نتایج فوری حاصل از خاصیت خطی بودن و تغییر ناپذیر

با زمان بودن سیستم می‌باشد.

اگر $X(t)$ فرآیندی نرمال باشد، در آن صورت $Y(t)$ نیز فرآیند نرمال است

این در واقع تعمیم خاصیت آشنای تبدیل‌های خطی متغیرهای تصادفی نرمال بوده و می‌توان با تقریب انتگرال (۶۸-۵) توسط مجموع زیر، آن را توجیه کرد.

$$Y(t_i) \simeq \sum_k X(t_i - \alpha_k) h(\alpha_k) \Delta(\alpha)$$

اگر $X(t)$ فرآیندی SSS باشد، در آن صورت، $Y(t)$ نیز SSS خواهد بود.

در واقع، از آنجا که به ازاء هر مقدار c، $Y(t+c) = L[X(t+c)]$ است، نتیجه می‌گیریم که اگر فرآیندهای $X(t)$ و $X(t+c)$ خصوصیات آماری یکسان داشته باشند، آن گاه فرآیندهای $Y(t)$ و $Y(t+c)$ نیز همان خصوصیات آماری را دارند.

بعداً نشان خواهیم داد که اگر $X(t)$ فرآیندی WSS است، فرآیندهای $X(t)$ و $Y(t)$ فرآیندهای توأماً WSS خواهند بود.

قضیه اساسی

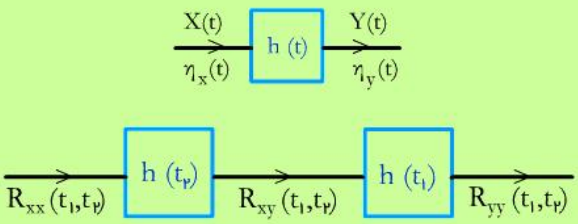
برای هرسیستم خطی

$$E\{L[X(t)]\} = L[E\{X(t)\}] \qquad (۵-۶۹)$$

است.

به عبارت دیگر متوسط خروجی $\eta_y(t)$ برابر پاسخ سیستم به ورودی $\eta_x(t)$ است (شکل ۷-۵)

(الف)



شکل ۷ - ۵

(ب)

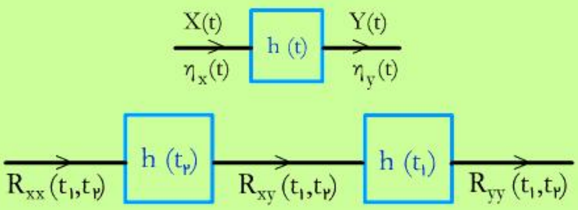
$$\eta_y(t) = L[\eta_x(t)] \qquad (۵-۷۰)$$

این رابطه تعمیمی ساده از خاصیت خطی مقادیر امید ریاضی به اپراتورهای خطی دلخواه می‌باشد.

از نظر رابطهٔ (۶۸-۵) می‌توان رابطهٔ فوق را نتیجه گرفت اگر انتگرال را به عنوان یک حدّ از مجموع بنویسیم.

$$E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t-\alpha)\} h(\alpha) d\alpha = \eta_x(t) * h(t) \qquad (۵-۷۱)$$

(الف)



شکل ۷ - ۵

(ب)

هم چنین برای رابطهٔ (۶۹-۵) می‌توان تعبیر فرکانسی ارائه داد.

در آزمایش i ام، ورودی به سیستم ما تابع $X(t,\xi_i)$ است

که خروجی آن تابع $Y(t,\xi_i)=L[X(t,\xi_i)]$ خواهد بود. به ازاء n بزرگ

$$E\{Y(t)\}\simeq\frac{Y(t,\xi_1)+\dots\dots+Y(t,\xi_n)}{n}=\frac{L[X(t,\xi_1)])+\dots+L[X(t,\xi_n)])}{n}$$

با استناد به خاصیت خطی سیستم عبارت آخر رابطهٔ فوق برابر است با

$$L[\frac{X(t,\xi_1)+\dots\dots+X(t,\xi_n)}{n}]$$

و این نتیجه با (۶۹-۵) همآهنگ است چون کسر بالا تقریباً با $E\{X(t)\}$ برابر است.

از رابطهٔ (۷۰-۵) می‌توان نتیجه گرفت که اگر

$$\tilde{Y}(t)=Y(t)-\eta_y(t)\quad,\quad\tilde{X}(t)=X(t)-\eta_x(t)$$

باشد در آن صورت

$$L[\tilde{X}(t)]=L[X(t)]-L[\eta_x(t)]=\tilde{Y}(t)\qquad(۵-۷۲)$$

بنابراین پاسخ سیستم خطی به ورودی تمرکز یافته $\tilde{X}(t)$

برابر خروجی تمرکز یافته $\tilde{Y}(t)$ است.

هم چنین تصور کنید که

$$X(t)=f(t)+\gamma(t)\quad,\quad E\{\gamma(t)\}=0$$

در این مورد $E\{X(t)\}=f(t)$ است. پس $\eta_y(t)=f(t)*h(t)$

بنابراین، اگر $X(t)$ مجموع سیگنال یقینی $f(t)$ و مولفهٔ تصادفی $\gamma(t)$ باشد، در آن صورت برای تعیین متوسط خروجی می‌توانیم $\gamma(t)$ را در نظر نگیریم مشروط بر آن که سیستم خطی بوده و $E\{\gamma(t)\}=0$ باشد.

قضیهٔ (۶۹-۵) را می‌توان برای توصیف گشتاورهای توأم (با هر مرتبه) خروجی $Y(t)$ یک سیستم خطی برحسب گشتاورهای متناظر ورودی به کار برد.

موارد خاص زیر در بررسی سیستم‌های خطی با ورودی‌های تصادفی از اهمیت به سزایی برخوردارند.

در مورد اول می‌خواهیم تابع خود بستگی $R_{yy}(t_1,t_2)$ خروجی $Y(t)$ یک سیستم خطی را بر حسب تابع خودبستگی $R_{xx}(t_1,t_2)$ ورودی $X(t)$ بیان کنیم.

همان گونه که خواهیم دید، آسان‌تر است که ابتدا هم بستگی متقابل بین $X(t)$ و $Y(t)$ یعنی $R_{xy}(t_1,t_2)$ را به دست آوریم.

پس قضیهٔ زیر را مطرح می‌کنیم.

$$R_{xy}(t_1,t_2)=L_2[R_{xx}(t_1,t_2)] \qquad (۵-۷۳)$$

و

$$R_{yy}(t_1,t_2)=L_1[R_{xy}(t_1,t_2)] \qquad (۵-۷۴)$$

در رابطهٔ (۷۳-۵) نماد L_2 بدین معنا است که سیستم بر روی متغیر t_2 عمل کرده و t_1 را یک پارامتر تلقی می‌کند.

یعنی رابطهٔ (۷۳-۵) به این شکل نیز قابل تعریف است.

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(t_1,t_2-\alpha)h(\alpha)d\alpha \qquad (۵-۷۵)$$

مشابهاً در رابطهٔ (۷۴-۵) نماد L_1 نشان می‌دهد که سیستم بر اساس t_1 عمل کرده و

$$R_{yy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(t_1-\alpha,t_2)h(\alpha)d\alpha \qquad (۵-۷۶)$$

برای اثبات کافی است که طرفین رابطهٔ (۶۶-۵) را در $X(t_1)$ ضرب کرده و با استفاده از (۶۷-۵) بنویسیم

$$X(t_1)Y(t)=L_t[X(t_1)X(t)]$$

که در آن L_t بدین مفهوم است که سیستم بر اساس t عمل می‌کند.

بنابراین

$$E\{X(t_1)Y(t)\}=L_t[E\{X(t_1)X(t)\}]$$

حال با تغییر t به t_2 رابطهٔ (۷۳-۵) به دست می‌آید.

اثبات رابطهٔ (۷۴-۵) نیز کاملاً مشابه روش فوق است.

ابتدا رابطهٔ (۶۶-۵) را در $Y(t_2)$ ضرب کرده و از (۶۹-۵) استفاده می‌کنیم

$$E\{Y(t)Y(t_2)\}=L_t[E\{X(t)Y(t_2)\}]$$

اگر $R_{xx}(t_1,t_2)$ ورودی به سیستم مفروض بوده و سیستم بر روی t_2 عمل کند، خروجی $R_{xy}(t_1,t_2)$ خواهد بود. اگر $R_{xy}(t_1,t_2)$ ورودی بوده و سیستم بر روی t_1 عمل نماید خروجی برابر $R_{yy}(t_1,t_2)$ می‌باشد.

از ادغام دو رابطهٔ (۵-۷۵) و(۵-۷۶) داریم

$$R_{yy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t_1-\alpha\,,\,t_2-\beta)h(\alpha)h(\beta)d\alpha d\beta$$

رابطهٔ فوق $R_{yy}(t_1,t_2)$ را مستقیماً بر حسب $R_{xx}(t_1,t_2)$ بیان می‌کند.

به هر حال از نظر مفهومی و عملی، ارجح است که ابتدا $R_{xy}(t_1,t_2)$ را حساب کنیم.

شکل (۵-۷) ب

$$R_{xx}(t_1,t_2) \longrightarrow \boxed{h(t_2)} \xrightarrow{R_{xy}(t_1,t_2)} \boxed{h(t_1)} \longrightarrow R_{yy}(t_1,t_2)$$

مثال ۱۵-۵

فرآیند ایستان $Y(t)$ با تابع خودبستگی $R_{\gamma\gamma}(\tau)=q\,\delta(\tau)$ (نویز سفید) در $t=0$ به سیستم خطی با پاسخ ضربه $h(t)=e^{-ct}U(t)$ اعمال می‌شود. تابع خود بستگی خروجی $Y(t)$ را برای $0<t_1<t_2$ حساب کنید.

برای رسیدن به پاسخ می‌توان از نتایج بحث قبل استفاده کرد.

فرض می‌کنیم ورودی به سیستم فرآیند $X(t)=\gamma(t)U(t)$ بوده و تمام هم‌بستگی‌ها به ازاء $t_1<0$ یا $t_2<0$ برابر صفر هستند.

به ازاء $t_1>0$ و $t_2>0$

$$R_{xx}(t_1,t_2)=E\{\gamma(t_1)\gamma(t_2)\}=q\delta(t_1-t_2)$$

با استناد به رابطهٔ (۵-۷۳)، $R_{xy}(t_1,t_2)$ پاسخ سیستم به $q\delta(t_1-t_2)$ به عنوان تابعی از t_2 می‌باشد.

از آنجا که $\delta(t_1-t_2)=\delta(t_2-t_1)$ بوده و

$$L\{\delta(t_2-t_1)\}=h(t_2-t_1)$$

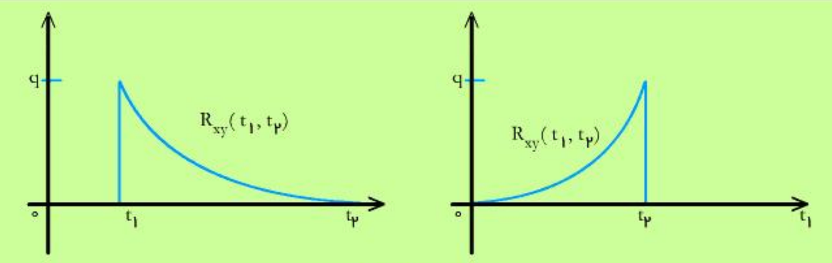
(تغییر ناپذیر با زمان) است نتیجه می‌شود که

$$R_{xy}(t_1,t_2)=qh(t_2-t_1)=qe^{-c(t_2-t_1)}U(t_2-t_1)U(t_1)$$

در شکل ۸-۵ $R_{xy}(t_1,t_2)$ به عنوان تابعی از t_1 و t_2

نشان داده شده است. با توجه به رابطهٔ (۷۴-۵) داریم

$$R_{yy}(t_1,t_2)=q\int_0^{t_1} e^{c(t_1-\alpha-t_2)}e^{-c\alpha}\,d\alpha \qquad t_1<t_2$$



شکل (۸-۵)

در شکل ۸-۵ $R_{xy}(t_1,t_2)$ به عنوان تابعی از t_1 و t_2

نشان داده شده است. با توجه به رابطهٔ (۷۴-۵) داریم

$$R_{yy}(t_1,t_2)=q\int_0^{t_1} e^{c(t_1-\alpha-t_2)}e^{-c\alpha}\,d\alpha \qquad t_1<t_2$$

بنابراین

$$R_{yy}(t_1,t_2)=\frac{q}{2c}(1-e^{-2ct_1})\,e^{-c|t_2-t_1|} \quad , \quad 0<t_1<t_2$$

قابل توجه است که

$$E\{Y^2(t)\}=R_{yy}(t,t)=\frac{q}{2c}(1-e^{-2ct})=q\int_0^t h^2(\alpha)\,d\alpha$$

تابع کوواریانس $C_{yy}(t_1,t_2)$ خروجی $Y(t)$ در واقع تابع خودبستگی فرآیند

$\tilde{Y}(t)=Y(t)-\eta_y(t)$ بوده و می‌توان نتیجه گرفت که

$\tilde{Y}(t)$ برابر $L[\tilde{X}(t)]$ است.

با اعمال (۷۵-۵) و(۷۶-۵) به فرآیندهای تمرکز یافته $\tilde{X}(t)$ و $\tilde{Y}(t)$

داریم

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1,t_2)&=C_{xx}(t_1,t_2)*h(t_2)\\ C_{yy}(t_1,t_2)&=C_{xy}(t_1,t_2)*h(t_1)\end{aligned} \qquad (۵-۷۷)$$

که در آن کانوولوشن به ترتیب برحسب t_1 و t_2 است.

نتایج فوق را می‌توان به آسانی به فرآیندهای مختلط و به سیستم‌هایی با پاسخ ضربه مختلط تعمیم داد.

با همان استدلال مورد حقیقی، داریه

$$R_{xy}(t_1,t_2)=R_{xx}(t_1,t_2)*h^*(t_2)$$
$$R_{yy}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2)*h(t_1) \quad (۵-۷۸)$$

اکنون می‌خواهیم توان متوسط $E\{|Y(t)|^2\}$

خروجی یک سیستم که توسط نویز سفید تحریک می‌شود راتعیین کنیم.

این موضوع در واقع مورد خاصی از (۷۸-۵) است که به علت اهمیت آن مطرح می‌شود.

اگر ورودی به یک سیستم خطی نویز سفید با تابع خودبستگی

$$R_{xx}(t_1,t_2) = q(t_1)\delta(t_1-t_2)$$

باشد می‌توان نشان داد که:

$$E\{|Y(t)|^2\}=q(t)*|h(t)|^2=\int_{-\infty}^{\infty} q(t-\alpha)|h(\alpha)|^2 d\alpha \quad (۵-۷۹)$$

برای اثبات با توجه به رابطهٔ (۷۸-۵) می‌توان گفت

$$R_{xy}(t_1,t_2)= q(t_1)\delta(t_2-t_1)*h^*(t_2)=q(t_1)h^*(t_2-t_1)$$
$$R_{yy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} q(t_1-\alpha)|h^*[t_2-(t_1-\alpha)]h(\alpha)\,d\alpha$$

و با قرار دادن $t_1=t_2=t$ رابطهٔ (۷۹-۵) اثبات می‌شود.

موارد خاص: الف) اگر $X(t)$ نویز سفید ایستان باشد، در آن صورت $q(t)=q$ شده و رابطهٔ (۷۹-۵) به شکل زیر در می‌آید.

$$E\{Y^2(t)\}=qE \quad , \quad E=\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2 dt$$

که E انرژی $h(t)$ است.

ب) اگر $h(t)$ در مقایسه با تغییرات $q(t)$ دارای پهنای زمانی کوتاهی باشد، آن گاه

$$E\{Y^2(t)\}\simeq q(t)\int_{-\infty}^{\infty}|h(\alpha)|^2 d\alpha=E\,q(t)$$

این رابطه عبارت" شدت متوسط " را که در توصیف تابع $q(t)$ به کار می‌رود، توجیه می‌کند.

ج) اگر $R_{\gamma\gamma}(\tau)=q\,\delta(\tau)$ بوده و $\gamma(t)$ در لحظهٔ $t=0$ به سیستم اعمال شود، در آن صورت $q(t)=qU(t)$ بوده و رابطهٔ (۷۹-۵) به رابطهٔ زیر منجر می‌شود

$$E\{Y^2(t)\}=q\int_{-\infty}^{t}|h(\alpha)|^2 d\alpha$$

مثال ۱۶-۵

انتگرال

$$Y(t)=\int_0^t \gamma(\alpha)d\alpha$$

را می‌توان به عنوان خروجی یک سیستم خطی با ورودی $X(t)=\gamma(t)U(t)$
و پاسخ ضربه $h(t)=U(t)$ در نظر گرفت.
بنابراین اگر $\gamma(t)$ نویز سفید با شدت متوسط $q(t)$ باشد، در آن صورت
$X(t)$ فرآیند نویز سفید با شدت متوسط $q(t)U(t)$ بوده و
رابطهٔ (۷۹-۵) به صورت زیر قابل بیان است

$$E\{Y^2(t)\}=q(t)U(t)*U(t)=\int_0^t q(\alpha)d\alpha$$

مشتق گیرها

مشتق گیر سیستمی خطی است که خروجی آن مشتق ورودی است

$$L[X(t)]=X'(t)$$

بنابراین می‌توانیم از نتایج گذشته استفاده کرده و تابع متوسط و تابع
هم بستگی $X'(t)$ را بیابیم. از (۷۰-۵) نتیجه می‌شود که

$$\eta_{x'}(t)=L[\eta_x(t)]=\eta'_x(t) \qquad (۵-۸۰)$$

مشابهاً

$$R_{xx'}(t_1,t_2)=L_2[R_{xx}(t_1,t_2)]=\frac{\partial R_{xx}(t_1,t_2)}{\partial t_2} \qquad (۵-۸۱)$$

زیرا در این حالت L_2 به معنی، مشتق نسبت به t_2 است. بالاخره

$$R_{x'x'}(t_1,t_2)L_1[R_{xx'}(t_1,t_2)]=\frac{\partial R_{xx'}(t_1,t_2)}{\partial t_1} \qquad (۵-۸۲)$$

از ترکیب نتایج فوق، داریم

$$R_{x'x'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 R_{xx}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \qquad (۵-۸۳)$$

حال اگر $X(t)$ فرآیند ایستان WSS باشد، در آن صورت، $\eta_x(t)$
مقداری ثابت بوده و

$$E\{X'(t)\}=0 \qquad (۵-۸۴)$$

علاوه بر آن، از آنجا که $R_{xx}(t_1,t_2)=R_{xx}(\tau)$ می‌باشد $(\tau=t_1-t_2)$

نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial R_{xx}(t_1-t_2)}{\partial t_2}=\frac{d R_{xx}(\tau)}{d\tau} \quad , \quad \frac{\partial^2 R_{xx}(t_1-t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}=\frac{d^2 R_{xx}(\tau)}{d\tau^2}$$

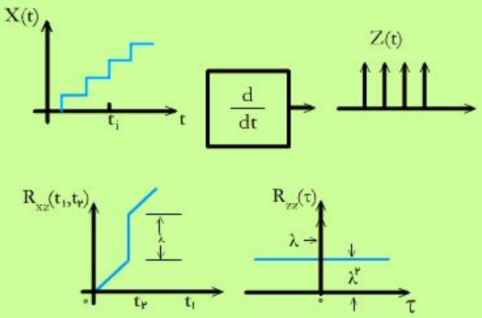
بنابراین

$$R_{xx'}(\tau)=-R_{x'x}(\tau) \quad , \quad R_{x'x'}(\tau)=-R''_{xx}(\tau) \qquad (۵-۸۵)$$

ضربه‌های پواسون

اگر ورودی به مشتق‌گیر یک فرآیند پواسون باشد خروجی $Z(t)$ یک قطار از ضربه‌ها (ایمپالس ها) خواهد بود. شکل(۹-۵)

$$Z(t)=\sum_i \delta(t-t_i)$$



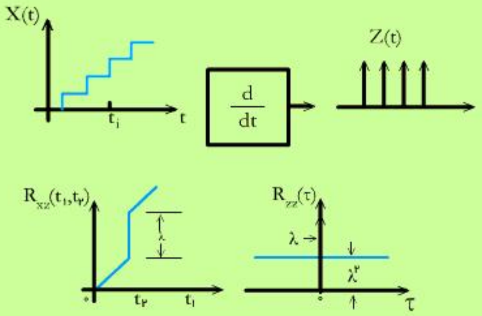
(الف)

شکل ۹-۵

(ب)

می‌خواهیم نشان دهیم که $Z(t)$ فرآیندی ایستان با متوسط $\eta_z=\lambda$ و تابع خودبستگی $R_{zz}(\tau)=\lambda^2+\lambda\delta(\tau)$ است.

متوسط فرآیند خروجی با استناد به رابطهٔ (۸۰ - ۵) و توجه به اینکه $\eta_x(t)=\lambda t$ است به سهولت به دست می‌آید



X(t)
t
t_i
$\frac{d}{dt}$
Z(t)
$R_{xz}(t_1,t_2)$
t_2
t_1
$R_{zz}(\tau)$
λ
λ^2
τ

(الف)

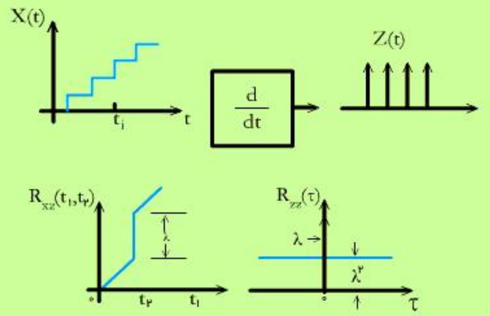
شکل ۹-۵

(ب)

به منظور اثبات تابع خودبستگی $Z(t)$ ملاحظه می‌کنیم که (فرآیند پواسون)

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \lambda^2 t_1 t_2 + \lambda \min(t_1, t_2)$$

و چون $Z(t) = X'(t)$ است پس بنا به رابطهٔ (۸۱ – ۵) داریم



(الف)

شکل ۹-۵

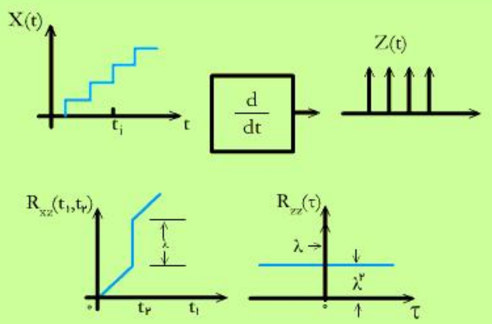
(ب)

$$R_{xz}(t_1, t_2) = \frac{\partial R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \lambda^2 t_1 + \lambda U(t_1 - t_2)$$

این تابع در شکل (۹ – ۵ ب) که در آن t_1 متغیر مستقل است رسم شده است.

همانگونه که مشاهده می‌شود در $t_1 = t_2$ دارای ناپیوستگی بوده و مشتق

آن نسبت به t_1 شامل ضربه $\lambda\delta(t_1 - t_2)$ خواهد بود.



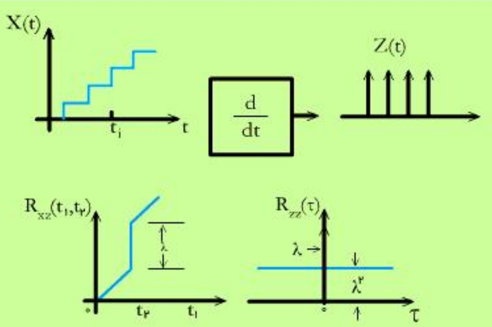
(الف)

شکل ۹-۵

(ب)

پس

$$R_{zz}(t_1, t_2) = \frac{\partial R_{xz}(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \lambda^2 + \lambda\delta(t_1 - t_2)$$



(الف)

شکل ۹-۵

(ب)