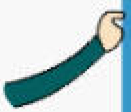
فصل سوم–دو متغیر تصادفی و توابع آن

۳–۱ دو متغیر تصادفی

در بسیاری از آزمایش‌ها ، مشاهدات و اندازه گیری ها را نمی‌توان بر حسب یک کمیت تنها بیان کرد بلکه آنها را باید بر طبق گروهی از کمیات و متغیرها توصیف نمود. برای مثال برای ثبت قد و وزن هر شخص در یک جامعه یا تعداد افراد و مجموع درآمد آنها در یک خانواده به دو عدد نیاز است . اگر Y, X دو متغیر تصادفی بر اساس مدل احتمال (Ω, F, P) فرض شوند ، در آن صورت



$$P(x_1 < X(\xi) \le x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\,dx$$

$$P(y_1 < Y(\xi) \le y_2) = F_y(y_2) - F_y(y_1) = \int_{y_1}^{y_2} f_y(y)\,dy$$

حال اگر دو متغیر تصادفی Y, X به یک ناحیه اختیاری D تعلق داشته باشند چگونه می توان احتمال آنها را محاسبه کرد؟

به عبارت دیگر چگونه می توان

$$P[(x_1 < x(\xi) \le x_2) \cap (y_1 < Y(\xi) \le y_2)]$$

را تخمین زد.

در جواب ، تابع توزیع تجمعی توام دو متغیر تصادفی Y, X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F_{xy}(x,y) = P[(X(\xi) \le x) \cap (Y(\xi) \le y)] = P(X \le x, Y \le y) \ge 0 \quad (۳–۱)$$

به طوری که y, x اعداد حقیقی اختیاری هستند.

تابع توزیع توام (Joint Distribution Function) دو متغیر تصادفی دارای خواص زیر است.

$$i)\ F_{xy}(-\infty, y) = F_{xy}(x, -\infty) = 0\ ,\ F_{xy}(+\infty, +\infty) = 1$$ (۳-۲)

$$ii)\ P(x_1 < X(\xi) \leq x_2, Y(\xi) \leq y) = F_{xy}(x_2, y) - F_{xy}(x_1, y)$$ (۳-۳)

$$P(X(\xi) \leq x, y_1 < Y(\xi) \leq y_2) = F_{xy}(x, y_2) - F_{xy}(x, y_1)$$ (۳-۴)

$$iii)\ P(x_1 < X(\xi) \leq x_2, y_1 < Y(\xi) \leq y_2) = F_{xy}(x_2, y_2) - F_{xy}(x_2, y_1) - F_{xy}(x_1, y_2) + F_{xy}(x_1, y_1)$$ (۳-۵)

تابع چگالی احتمال توام دو متغیر تصادفی نیز دارای خواص زیر می باشد:

$$i)\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y)\,dx\,dy = 1$$ (۳-۸)

$$ii)\ P\{(X, Y) \in D\} = \iint_{(x,y)\in D} f_{xy}(x, y)\,dx\,dy$$ (۳-۹)

$$iii)\ F_x(x) = F_{xy}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(u, y)\,du\,dy$$ (۳-۱۰)

$$iv)\ f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y)\,dy$$ (۳-۱۱)

لازم به ذکر است که $f_x(x)$ را تابع چگالی احتمال کناری (Marginal) متغیر تصادفی X نامند . همچنین باید اضافه کرد که اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند در آن صورت $p_{ij} \triangleq P(X=x_i, Y=y_j)$ بیانگر تابع چگالی احتمال توأم آنها بوده و تابع چگالی کناری آنها عبارت است از :

$$P(X=x_i)=\sum_j P(X=x_i, Y=y_j)=\sum_j p_{ij} \qquad (۳-۱۲)$$

$$P(Y=y_j)=\sum_i P(X=x_i, Y=y_j)=\sum_i p_{ij} \qquad (۳-۱۳)$$

بر اساس روابط (۱۰-۳) و (۱۱-۳) مشاهده می کنیم که تابع چگالی احتمال توأم و یا تابع توزیع توأم اطلاعات کاملی درباره متغیرهای تصادفی ارائه می دهند و با استفاده از تابع چگالی احتمال توأم می توان توابع چگالی احتمال کناری آنها را به دست آورد به هر حال اگر توابع کناری در دست باشد محاسبه تابع چگالی احتمال توأم امکان پذیر نیست به استثنای موردی که دو متغیر تصادفی مستقل آماری ا

یکدیگر باشند.

دو متغیر تصادفی X, Y را هنگامی مستقل آماری از یکدیگر نامند که پیشامدهای

$$\{X(\xi)\in A\}, \{Y(\xi)\in B\}$$

پیشامدهای مستقل به ازاء هر دو مجموعه بورل A و B

به ترتیب روی محورهای x, y باشند.

با استناد به تعریف فوق در مورد دو پیشآمد $\{X(\xi)\leq x\}, \{Y(\xi)\leq y\}$

می‌توان نتیجه گرفت که اگر متغیرهای تصادفی X, Y مستقل باشند در آن صورت

$$P\{(X(\xi)\leq x)\cap(Y(\xi)\leq y)\}=P(X(\xi)\leq x)P(Y(\xi)\leq y) \qquad (۳-۱۴)$$

یعنی

$$F_{xy}(x,y)=F_x(x)F_y(y) \qquad (۳-۱۵)$$

و یا معادلاً اگر Y, X مستقل باشند باید بتوان نوشت

$$f_{xy}(x,y)=f_x(x)f_y(y) \qquad (۳-۱۶)$$

بدیهی است که اگر Y, X دو متغیر تصادفی گسسته باشند ، در آن صورت استقلال آنها به صورت زیر قابل بیان است

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j), \forall i,j \qquad (۳-۱۷)$$

روابط(۱۴-۳) الی (۱۷-۳) در واقع روشی برای تعیین استقلال دو متغیر را نشان می دهند .

اگر $f_{xy}(x,y)$ در دست باشد ابتدا توابع کناری $f_x(x)$, $f_y(y)$ را محاسبه وبررسی می کنیم که آیا روابط (۱۶-۳) یا (۱۷-۳) در مورد آنها صادق است یا نه . درصورت جواب مثبت ، دو متغیر تصادفی مستقل آماری از یکدیگر خواهند بود .

مثال۱-۳ :

تابع چگالی احتمال توام زیر مفروض است . آیا دو متغیر تصادفی Y, X از یکدیگر مستقل هستند؟

$$f_{xy}(x,y)=\begin{cases} xy^{2}e^{-y}, & 0<y<\infty \quad , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ابتدا توابع چگالی احتمال کناری را محاسبه می کنیم.

$$f_x(x)=\int_0^{\infty} f_{xy}(x,y)dy=x\int_0^{\infty} y^{2}e^{-y}dy=2x \ , \ 0<x<1$$

مشابهاً

$$f_y(y)=\int_0^{1} f_{xy}(x,y)dx=\frac{y^{2}}{2}e^{-y} \ , \ 0<y<\infty$$

در این مورد ملاحظه می کنیم که

$$f_{xy}(x,y)=f_x(x)f_y(y)$$

بوده و در نتیجه می توان گفت Y, X متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

۲–۳ تابعی از دو متغیر تصادفی

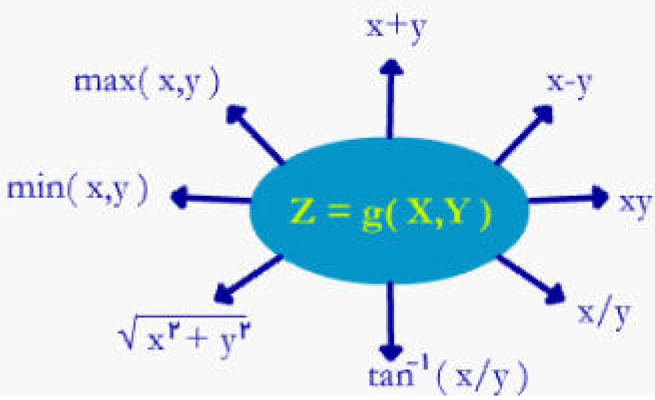
فرض کنید دو متغیر تصادفی Y, X و تابع $g(x,y)$ داده شده است.
متغیر تصادفی جدیدی به نام Z را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Z = g(X,Y) \qquad (۳\text{-}۱۷)$$

اگر تابع چگالی احتمال توام $f_{xy}(x,y)$ معلوم باشد چگونه می توان تابع
چگالی احتمال $f_z(3)$ را به دست آورد؟

مسائلی از این نوع در عمل مورد توجه قرار می گیرند . برای مثال سیگنال ورودی

به گیرنده معمولاً از سیگنال مطلوب که آلوده به نویزاست تشکیل یافته و ترکیب آنها
در این مورد به شکل $Z=X+Y$ می باشد. شناخت و اطلاع از خصوصیات آماری
سیگنال دریافتی به منظور طراحی صحیح گیرنده امری ضروری است.
در این رابطه همانگونه که در شکل ۱–۳ مشاهده می شود ترکیب ها یا توابع
مختلفی را می توان تعریف یا مدل کرد.



شکل ۱–۳

با استناد به رابطه (۳-۱۷)می توان چنین شروع کرد .

$$F_z(3)=P(Z(\xi)\le 3)=P(g(X,Y)\le 3)=P[(X,Y)\in D_z]$$
$$=\iint_{x,y\in D_z} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy \qquad (۳-۱۸)$$

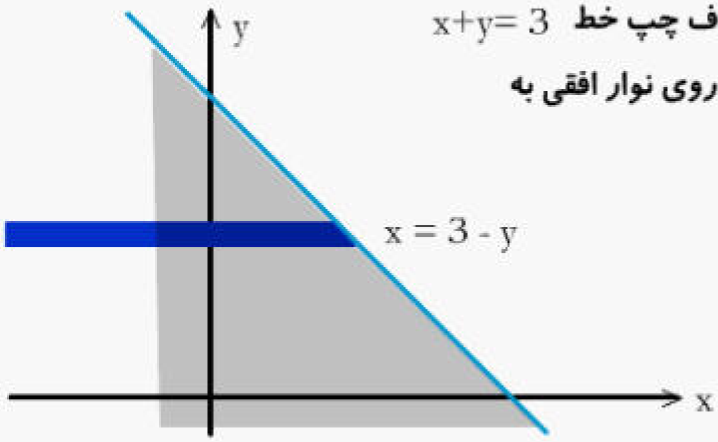
که در آن D_Z در صفحه XY بیانگر ناحیه ای که در آن $g(x,y)\le 3$ می باشند. باید توجه کرد که لزومی ندارد D_Z یک ناحیه یکپارچه باشد و می تواند از چند ناحیه جدا از هم تشکیل یابد

مثال ۲-۳ :

اگر $Z=X+Y$ باشد تابع $f_z(3)$ را به دست آورید

$$f_z(3)=P(X+Y\le 3)=\int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{3-y} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy \qquad (۳-۱۹)$$

از آنجا که ناحیه D_z در صفحه xy محدوده $x+y\le 3$ یعنی ناحیه سایه دار در شکل ۲-۳ و در طرف چپ خط $x+y=3$ قرار دارد ابتدا روی نوار افقی به



شکل (۲-۳)

موازات محور x انتگرال گرفته (انتگرال درونی رابطه فوق) و سپس نوار را در امتداد محور y از $-\infty$ تا $+\infty$ (انتگرال بیرونی) لغزنده و تمام سطح سایه دار را پوشش می دهیم.

می توان تابع چگالی $f_z(3)$ را با گرفتن مشتق از $F_z(3)$ مستقیماً به دست آورد.
در این رابطه بهتر است از قاعده مشتق گیری منتسب به لایبنیتز (Leibnitz)
استفاده کرد. فرض کنید ؛

$$H(3)=\int_{a(3)}^{b(3)} h(x,3)dx \qquad (۳-۲۰)$$

در آن صورت

$$\frac{dH(3)}{d3} = \frac{db(3)}{d3} h(b(3),3)- \frac{da(3)}{d3} h(a(3),3)+ \int_{a(3)}^{b(3)} \frac{\partial h(x,3)}{\partial 3} dx \qquad (۳-۲۱)$$

اگر رابطه (۲۱-۳) را در رابطه (۱۹-۳) بکار ببریم می توان نوشت

$$f_z(3)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial 3}\int_{-\infty}^{3-y} f_{xy}(x,y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f_{xy}(3-y,y)-0 + \int_{-\infty}^{3-y}\frac{\partial f_{xy}(x,y)}{\partial 3}\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(3-y,y)dy \qquad (۳-۲۲)$$

اگر در روش فوق ابتدا انتگرال را روی محور y و سپس روی محور x انجام دهیم به نتیجه زیر خواهیم رسید .

$$f_z(3)=\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x,3-x)dx$$

اگر Y, X دو متغیر تصادفی مستقل از یکدیگر باشند در آن صورت رابطه (۲۲-۳) ساده ترخواهد شد.

$$f_z(3)=\int_{y=-\infty}^{+\infty} f_x(3-y)f_y(y)dy=\int_{x=-\infty}^{+\infty} f_x(x)f_y(3-x)dx \qquad (۳-۲۳)$$

بنابراین می توان گفت اگر دو متغیر تصادفی مستقل از یکدیگر باشند تابع چگالی احتمال مجموع آنها برابر کانوولوشن توابع چگالی احتمال آن دو متغیرتصادفی خواهد بود. به عنوان مثال اگر Y, X دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه $[۰, ۱]$ باشند در آن صورت مجموع آنها یعنی $Z=X+Y$ دارای تابع چگالی احتمال زیر خواهد بود .

$$f_z(3)=\begin{cases} 3 & , ۰\leq 3<۱ \\ ۲-3 & , ۱\leq 3<۲ \end{cases}$$

جواب فوق در واقع کانوولوشن دو تابع مستطیلی است که به صورت یک تابع مثلثی ظاهر می شود.

مثال ۳-۳

فرض کنید $Z = X - Y$ است ، تابع چگالی احتمال $f_z(3)$ را تعیین کنید .

$$F_z(3) = P(X\text{-}Y \leq 3) = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{3+y} f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

بنابراین

$$f_z(3) = dF_z(3) / d3 = \int_{y=-\infty}^{\infty} (\partial/\partial 3 \int_{x=-\infty}^{3+y} f_{xy}(x,y)\, dx)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(y+3, y)\, dy \qquad (۳-۲۴)$$

حال اگر Y,X مستقل از یکدیگر باشند ، در آن صورت رابطه فوق ساده تر خواهد شد .

$$f_z(3) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(3+y)\, f_y(y)\, dy = f_x(-3) * f_y(3) \qquad (۳-۲۵)$$

که بیانگر کانوولوشن توابع چگالی احتمال $f_x(-3), f_y(3)$ می باشد .

فرض کنید $Z = X / Y$ است . تابع چگالی احتمال Z را به دست آورید .

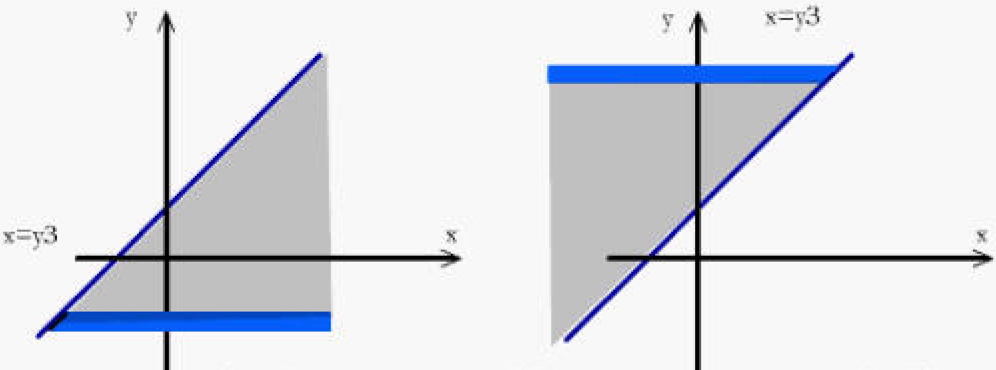
نامساوی $(X / Y) \leq 3$ را می‌توان به دو صورت زیر بیان کرد . اگر $Y > 0$ باشد در آن صورت $X \leq Y3$ بوده و اگر $Y < 0$ باشد در این صورت $X > Y3$ خواهد بود . بنابراین پیشامد $((X / Y) \leq 3)$ که برای محاسبه $F_z(3)$ مورد نیاز است ، بایستی به پیشامد $A = (Y > 0)$ و مکمل آن $\overline{A}$ مشروط شود . با توجه به این که $A \cup \overline{A} = \Omega$ است می توان نوشت :

$$\{ X/Y \leq 3 \} = \{ (X/Y \leq 3) \cap (A \cup \overline{A}) \} = \{ (X/Y \leq 3) \cap A \} \cup \{ (X/Y \leq 3) \cap \overline{A} \}$$

و نظر به ناسازگار بودن دو پیشامد اخیر A , $\overline{A}$

$$P(X/Y \leq 3) = P(X/Y \leq 3 \ , Y > 0) + P(X/Y \leq 3 \ , Y < 0)$$
$$= P(X \leq Y3 \ , Y > 0) + P(X \geq Y3 \ , Y < 0)$$

شکل (۳-۳ الف) سطح مربوط به عبارت اول و شکل (۳-۳ ب) سطح مربوط به عبارت دوم در رابطه بالا را نشان می دهد .



(ب) شکل ۳-۳ (الف)

با گرفتن انتگرال روی این دو ناحیه ، خواهیم داشت :

$$F_z(3) = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{y3} f_{xy}(x,y)\, dx\, dy + \int_{y=-\infty}^{0} \int_{x=y3}^{\infty} f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

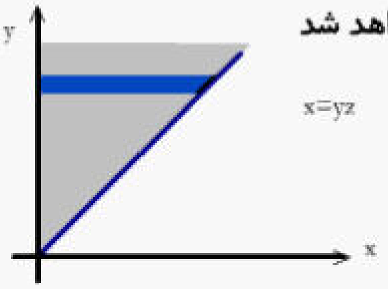
اگر از تابع فوق نسبت به 3 مشتق بگیریم .

$$f_z(3) = \int_0^{\infty} y\, f_{xy}(y3\,, y)\, dy + \int_{-\infty}^{0} (-y)\, f_{xy}(y3, y)\, dy$$

$$f_z(3) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_{xy}(y3\,, y)\, dy \qquad , -\infty < 3 < +\infty$$

توجه کنید که اگر X , Y متغیر تصادفی غیر منفی باشند ، در آن صورت

سطح انتگرال به شکل ۴-۳ تبدیل خواهد شد



شکل (۴-۳)

در این حالت تابع توزیع و چگالی احتمال Z عبارت است از :

$$f_z(3) = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{y3} f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

$$f_z(3) = \begin{cases} \int_0^{\infty} y\, f_{xy}(y3\,, y)\, dy \quad , & 3 > 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مثال ۵–۳

اگر X , Y متغیرهای تصادفی تواماً نرمال با متوسط صفر

و تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند .

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

نشان دهید که نسبت $Z = X / Y$

دارای تابع چگالی احتمال کوشی است که مرکز آن در $r\sigma_1 / \sigma_2$ قرار دارد .

از ادغام تابع چگالی احتمال توأم این مثال با نتیجه مثال قبل

و استفاده از تقارن $f_{xy}(-x , -y) = f_{xy}(x,y)$

می توان نتیجه گرفت که :

$$f_z(z) = \frac{2}{2\pi \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \int_0^{\infty} y\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}}\, dy = \frac{\sigma_0^2(z)}{\pi \sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}$$

به طوری که

$$\sigma_0^2(z) = \frac{1-r^2}{\frac{z^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rz}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

بنابراین

$$f_z(z) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2} / \pi}{\sigma_2^2(z - r\sigma_1/\sigma_2)^2 + \sigma_1^2(1-r^2)}$$

که بیانگر متغیر تصادفی کوشی با مرکزیت $r\sigma_1/\sigma_2$

می‌باشد . با گرفتن انتگرال از رابطه فوق و از $-\infty$ تا z تابع توزیع زیر به دست می‌آید

$$F_z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \operatorname{Arctan} \frac{\sigma_2 z - r\sigma_1}{\sigma_1\sqrt{1-r^2}}$$

مثال ۶–۳

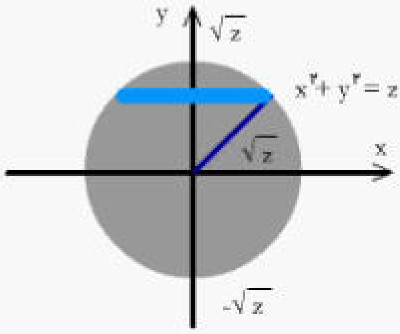
اگر $Z = X^2+Y^2$ باشد ، تابع چگالی احتمال Z را تعیین کنید .

می توان نوشت

$$F_z(3) = P(X^2+Y^2 \le 3) = \iint_{x^2+y^2 \le 3} f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

ولی $X^2+Y^2 \le 3$ بیانگر سطح دایره ای به شعاع $\sqrt{3}$

بوده و مطابق شکل ۵–۳



$$F_z(3) = \int_{y=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{x=-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} f_{xy}(x,y)\, dx\, dy$$

با گرفتن مشتق از رابطه فوق داریم :

$$f_z(3) = \int_{y=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1/2\sqrt{3-y^2})\; f_{xy}(\sqrt{3-y^2}, y)\, dy + f_{xy}(-\sqrt{3-y^2}, y)\, dy$$

حال برای روشن تر شدن مفهوم این مثال ، فرض کنید : X , Y

دو متغیر تصادفی مستقل از هم نرمال با متوسط صفر و واریانس

یکسان σ^2 باشند . در این مورد $f_z(3)$ عبارت خواهد بود از :

$$f_z(3) = \int_{y=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1/2\sqrt{3-y^2})((2 \times 1/2\pi\sigma^2)e^{-(3-y^2+y^2)/2\sigma^2})\, dy$$

$$= (1/2\sigma^2)\, e^{-3/2\sigma^2}\, U(3)$$

که نتیجه فوق با استفاده از تغییر متغیر $y = \sqrt{3}\sin\theta$

به دست آمده است . با توجه به این نتیجه می توان گفت که اگر Y , X

دو متغیر تصادفی مستقل گوسی با متوسط صفر و واریانس یکسان $\sigma^۲$

باشند در آن صورت $X^۲ + Y^۲$

یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $۲\sigma^۲$ خواهد بود .

مثال ۷-۳

اگر $Z = \max(X,Y) , W = \min(X,Y)$ باشد ، توابع چگالی احتمال $f_z(3) , f_w(w)$ را به دست آورید .

توابع $\max$ (حداکثر) و $\min$ (حداقل) توابع (اپراتورهای) غیر خطی بوده و موارد خاصی از آمارگان با مرتبه کلی تر را بیان می کنند .

به طور کلی ، اگر n کمیت $x_۱, x_۲, ... , x_n$ را در نظر بگیریم می توان آنها را با ترتیب افزایشی مقادیرشان مرتب کرد به طوری که :

$$x_{(۱)} \leq x_{(۲)} \leq ..... \leq x_{(n)} \quad (۳-۲۶)$$

که در آن $x_{(۱)} = \min(x_۱, x_۲ , ... , x_n)$ و $x_{(۲)}$ کوچکترین مقدار دوم بین $x_۱, x_۲, ... , x_n$ و بالاخره $X_n = \max(x_۱, x_۲ , ... , x_n)$ می باشد

$x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ متغیرهای تصادفی باشند ،

تابع $X_{(k)}$ که مقدار $x_{(k)}$ را در هر دنباله ممکن $(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$

را اختیار می کند ، آمارگان مرتبه k ام نامند .

$$(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots\dots, x_{(n)})$$

بیانگر مجموعه آمارگان مرتبه ای بین n متغیر تصادفی است .

$$R = X_{(n)} - X_{(1)} \qquad (۳-۲۷)$$

در این رابطه R را گستره نامیده و هنگامی که $n = ۲$

است با آمارگان $\max, \min$ سروکار داریم .

حال اجازه دهید به مثال برگردیم . از آنجا که

$$Z = \max(x,y) = \begin{cases} X & , X > Y \\ Y & , X \le Y \end{cases}$$

می‌توان نوشت :

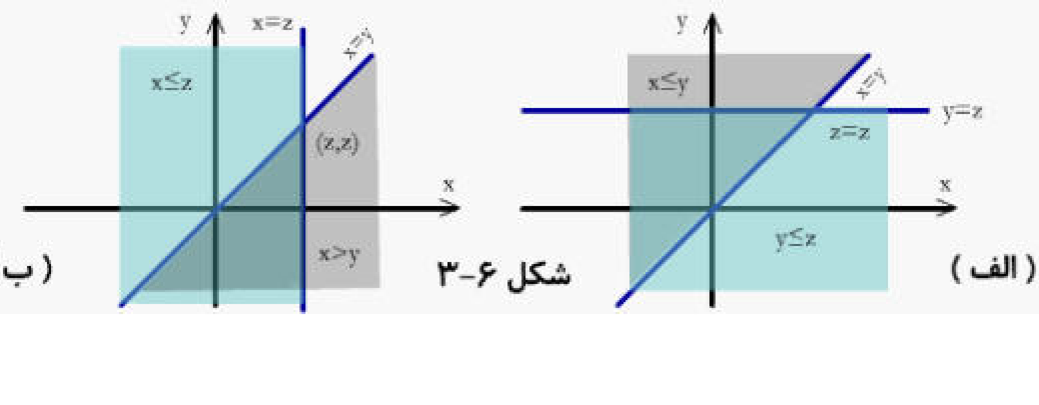
$$\begin{aligned} F_z(3) &= P(\max(X,Y) \le 3) = P[(X \le 3, X > y) \cup (Y \le 3, X \le Y)] \\ &= P[(X \le 3, X > y) + (Y \le 3, X \le Y)] \end{aligned}$$

چون $(X > y), (X \le Y)$

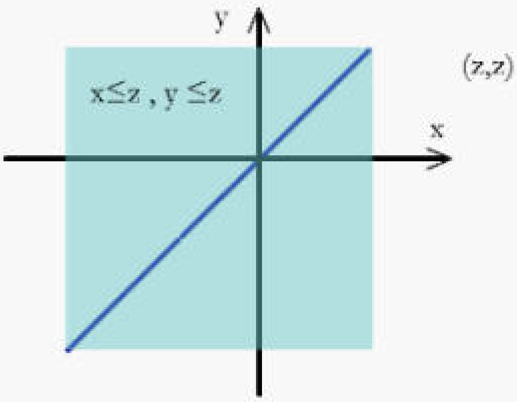
پیشامدهای ناسازگاری بوده و یک جزء بندی را تشکیل می دهند .

شکل های ۶-۳ الف و ب نواحی که مربوط به نامساوی ها در هر عبارت

رابطه بالا است را نشان داد



(ب) شکل ۶-۳ (الف)



(ج)

شکل ۱۶-۳ ج ناحیه کل را نمایش می دهد و با توجه به این شکل می توان نوشت :

$$F_z(3) = P(X \le 3, Y \le 3) = F_{xy}(3,3)$$

اگر Y, X از یکدیگر مستقل باشند .

$$F_z(3) = F_X(x) F_Y(y)$$

و بنابراین

$$f_Z(3) = F_X(3)\, f_Y(3) + f_X(3) F_Y(3)$$

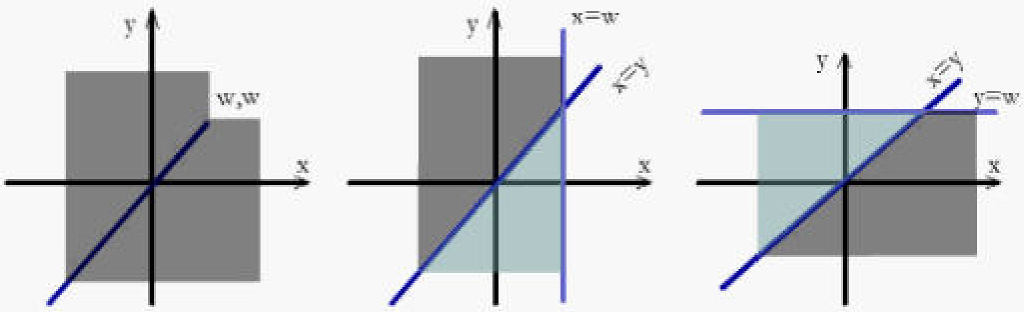
مشابهاً

$$W = \min(X, Y) = \begin{cases} Y & , \quad X > Y \\ X & , \quad X \le Y \end{cases}$$

بنابراین

$$F_W(w) = P(\min(X,Y) \le w) = P[(Y \le w, X > Y) U (X \le w, X \le Y)]$$

مجدداً ، نواحی سایه دار در شکل ۷-۳ الف و ب نواحی که مربوط به نامساوی های فوق است را نشان داده و شکل ۷-۳ ج ناحیه کلی را نشان می دهد



(ج)　　(ب)　　(الف)

شکل ۷-۳

با توجه به شکل ۶-۳ ج می توان نتیجه گرفت :

$$F_W(w) = 1 - P(W > w) = 1 - P(X > w, Y > w) = F_x(w) + F_y(w) - F_{xy}(w,w)$$

که در آن از رابطه (۵-۳) به ازاء $x_1 = y_1 = w$, $x_2 = y_2 = +\infty$ استفاده شده است .

مثال ۸-۳ (حالت گسسته)

فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی پواسون مستقل با پارامترهای λ_1 و λ_2 هستند .

اگر $Z = X + Y$ باشد تابع جرم احتمال (pmf) Z را تعیین کنید .

از آنجا که هر دو متغیر X و Y مقادیر صحیح { ....۰،۱،۲ }

را اختیار می کنند این امر در مورد Z نیز صادق است .

به ازاء هر $n = 0, 1, 2, \ldots$, $X + Y = n$

فقط تعداد محدودی از گزینه ها را برای X و Y بیان می کند .

در حقیقت اگر $X = 0$ باشد درآن صورت Y باید n باشد ، اگر $X = 1$

در آن صورت Y باید $n - 1$ باشد و الی آخر . پس پیشامد $\{ X + Y = n \}$

اجتماع $(n + 1)$ پیشامد ناسازگار A_k است که به صورت زیر توصیف می شوند .

$$A_k = \{ X = k, Y = n - k \}, k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

در نتیجه

$$P(Z=n)=P(X+Y=n)=P\{\bigcup_{k=0}^{n} X=k, Y=n-k\}$$
$$=\sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k)$$

اگر X و Y نیز مستقل باشند در آن صورت

$$P(X=k, Y=n-k)=P(X=k)\,P(Y=n-k)$$

بنابراین

$$P(Z=n)=\sum_{k=0}^{n} P(X=k\ , Y=n-k)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=(e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}/n!)\sum_{k=0}^{n}(n!/(k!(n-k)!))\,\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}$$
$$=(e^{-(\lambda_1+\lambda_2)})\,(\lambda_1+\lambda_2)^n/n! \quad , n=0,1,2,\ldots\ldots,\infty$$

بنابراین Z یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda_1+\lambda_2$ را توصیف می کند .

به عبارت دیگر می توان گفت که مجموع دو متغیر تصادفی پواسون مستقل خود نیز یک متغیر تصادفی پواسون است که پارامتر آن برابر مجموع پارامتر متغیرهای تصادفی مذکور است .

همانگونه که مثال اخیر نشان می دهد ، روش فوق جهت تعیین تابع جرم احتمال توابع متغیرهای تصادفی گسسته به نحوی از انحاء خسته کننده است .

در بخش های بعدی ملاحظه خواهیم کرد که برای حل چنین مسائلی ، استفاده از تابع مشخصه توأم روش آسان تری است .

۳-۳ دو تابع از دو متغیر تصادفی

در این بخش ، مفهوم مطرح شده قبل را تعمیم داده و دو متغیر تصادفی Y, X را با تابع چگالی احتمال $f_{xy}(x,y)$ در نظر می گیریم.
فرض کنید توابع $g(x,y)$, $h(x,y)$ دو متغیر تصادفی جدید را به صورت زیر تولید می کنند :

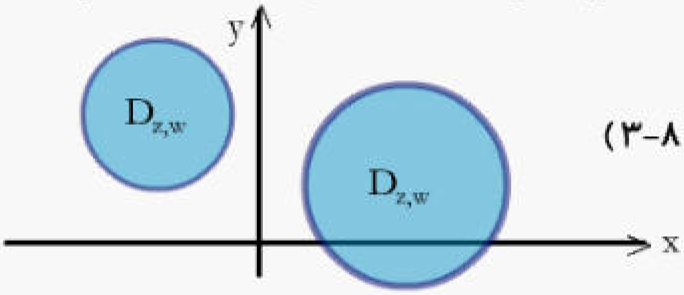
$$Z = g(X,Y) \qquad (۳-۲۸)$$

$$W = h(X,Y) \qquad (۳-۲۹)$$

چگونه می توان تابع چگالی احتمال توام آنها یعنی $f_{zw}(3,w)$ را تعیین کرد؟ بدیهی است که اگر $f_{zw}(3,w)$ به دست آید توابع چگالی احتمال کناری $f_z(3)$, $f_w(w)$ به آسانی قابل تعیین است . مشابه روش بخش قبل ، به ازاء مقدار مشخص $w, 3$ می توان نوشت :

$$\begin{aligned} F_{zw}(3,w) &= P\{Z(\xi) \le 3, W(\xi) \le w\} \\ &= P\{g(X,Y) \le 3, h(X,Y) \le w\} \qquad (۳-۳۰) \\ &= P\{(x,y) \in D_{z,w}\} = \iint_{(x,y)\in D_{z,w}} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy \end{aligned}$$

که $D_{z,w}$ ناحیه ای از صفحه xy است که درآن نا مساوی های $g(x,y) \le 3, h(x,y) \le w$ به طور همزمان اقناع می‌شوند (شکل۸-۳) .
این روش در مثال زیر مورد استفاده قرار می گیرد



شکل (۸-۳)

مثال ۹-۳

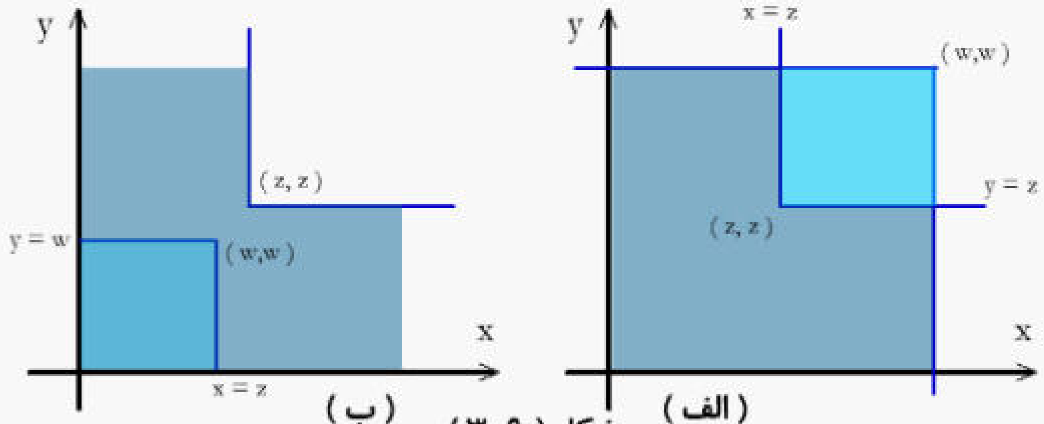
فرض کنید X, Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت در بازه $[0, \theta]$ هستند.توابع $W= \max(X,Y)$ و $Z=\min(X,Y)$ را تعریف می کنیم . تابع چگالی احتمال $f_{zw}(3,w)$ را به دست آورید .

چون هر دو متغیر Z, W در بازه $[0, \theta]$ تغییر می کنند پس اگر $3<0$ یا $w<0$ باشد ، $F_{zw}(3,w)=0$

$$F_{zw}(3,w) = P(Z \leq 3, W \leq w)$$

$$= P(\min(X,Y) \leq 3 , \max(X,Y) \leq w)$$

دو مورد $w<3, w>3$ را باید در نظر گرفت چون آنها برای $D_{z,w}$ نواحی متفاوتی را توصیف می کنند . (شکل ۹-۳ الف و ب)



شکل (۹-۳)

به ازاء $w \geq 3$ و با توجه به شکل ۹-۳ الف ناحیه $D_{z,w}$ با سطح دو بار هاشور خورده توصیف می شود . بنابراین

$$F_{zw}(3,w)=F_{xy}(3,w)+ F_{xy}(w,3)-F_{xy}(3,3) \quad , w \geq 3$$

و به ازاء $w<3$ و با توجه به شکل ۹-۳ ب داریم

$$F_{zw}(3,w)=F_{xy}(w,w) \; , \; w<3$$

می دانیم که

$$F_{xy}(x,y)=F_x(x)F_y(y)=\frac{x}{\theta}\cdot\frac{y}{\theta}=\frac{xy}{\theta^2}$$

می‌توان نوشت

$$F_{zw}(z,w)=\begin{cases}(2w-z)\,.\,z/\theta^2 & , \quad 0<z<w<\theta \\ w^2/\theta^2 & , \quad 0<w<z<\theta\end{cases}$$

بنابراین

$$f_{zw}(z,w)=\begin{cases}2/\theta^2 & , \quad 0<z<w<\theta \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

با استفاده از رابطه بالا توابع چگالی احتمالی کناری نیز قابل تعیین است

$$f_z(z)=\int_z^{\theta} f_{zw}(z,w)\,dw=\frac{2}{\theta}\left(1-\frac{z}{\theta}\right) , \quad 0<z<\theta$$

$$f_w(w)=\int_0^{w} f_{zw}(z,w)\,dz=\frac{2w}{\theta^2} , \quad 0<w<\theta$$

اگر $g(x,y)$, $h(x,y)$ توابع پیوسته و قابل مشتق گیری باشند ،
می توان مانند مورد یک متغیر تصادفی (رابطه (۴-۲)) فرمولی را
مطرح کرد که تابع چگالی احتمال توأم $f_{zw}(3,w)$ را مستقیماً تعیین کند .
معادلات زیر را در نظر بگیرید :

$$g(x,y) = 3 \quad , \quad h(x,y) = w \qquad (۳-۳۱)$$

به ازاء یک 3 و w مفروض معادلات فوق جوابهای متعددی دارد که آنها را به صورت

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots (x_n, y_n)$$

نشان می دهیم . می توان اثبات کرد که با معلوم بودن تابع چگالی احتمال توأم
Y, X ($f_{xy}(x,y)$) **تابع چگالی احتمال توأم** W, Z ($f_{zw}(3,w)$

بر اساس رابطه زیر به دست می آید :

$$f_{zw}(3,w) = \sum_{i} \frac{1}{|J(x_i, y_i)|} f_{xy}(x_i, y_i) \qquad (۳-۳۲)$$

به طوری که $J(x_i, y_i)$ **ژاکوبین** (Jacobian)
تبدیلات اولیه در رابطه (۳۱-۳) بوده و از رابطه زیر قابل تعیین است :

$$J(x_i, y_i) = \left| \begin{matrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{matrix} \right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \qquad (۳-۳۳)$$

یکی از کاربردهای مهم رابطه (۳۲-۳) تبدیل خطی است . به عبارت دیگر :

$$Z = aX + b \qquad W = cX + dY \qquad (۳-۳۴)$$

اگر $ad - bc \neq ۰$ باشد در آن صورت دسته معادلات

$$ax + by = 3 , cx + dy = w$$

فقط دارای یک جواب $y = c3 + dw , x = a3 + bw$

بوده و چون $J(x,y) = ad - bc$

است پس با استناد به رابطه (۳۲-۳) می توان نتیجه گرفت :

$$f_{zw}(3,w) = \frac{۱}{|ad - bc|} f_{xy}(a3 + bw , c3 + dw)$$

با توجه به این نوع تبدیل و نتایج فوق می توان گفت اگر Y, X دو متغیر تصادفی توأماً نرمال باشند ، هرگونه ترکیب خطی آن دو خود نیز دو متغیر تصادفی توأماً نرمال خواهد بود ، یعنی Z , W نیز دو متغیر تصادفی توأماً نرمال هستند .

مثال ۱۰-۳

فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی مستقل گوسی با متوسط صفر و واریانس یکسان $\sigma^۲$ هستند . اگر $Z = \sqrt{X^۲ + Y^۲} , W = \tan^{-1}(Y/X)$ باشد به طوری که $|W| \leq \pi / ۲$ است ، تابع چگالی احتمال توأم $f_{zw}(3,w)$ را به دست آورید . می دانیم که

$$f_{xy}(x,y) = \frac{۱}{۲\pi \sigma^۲} e^{-(x^۲+y^۲)/۲\sigma^۲}$$

بوده و چون $|w| \leq \pi / ۲$

$$w = h(x,y) = \tan^{-1}(y/x) \quad , \quad 3 = g(x,y) = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

است پس اگر (x_1 , y_1) یک جواب معادلات فوق باشد جواب دیگر $(-x_1 , -y_1)$ خواهد بود ، بنابراین $y/x = \tan w \quad , \quad y = x \tan w$ و از قراردادن آن در رابط

$3 = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$ داریم .

$x = 3\cos w$ و به نحو مشابه می توان نشان داد : $y = 3 \sin w$

پس دو گروه جواب عبارتند از :

$$\begin{cases} x_۱ = 3 \cos w \\ y_۱ = 3 \sin w \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x_۲ = -3 \cos w \\ y_۲ = -3 \sin w \end{cases}$$

با استفاده از ژاکوبین در رابطه (۳۳-۳) داریم

$$J\,(x,y) = ۱ / (\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}) = ۱/3$$

بنابراین

$$f_{zw}(3,w) = 3\,[\,f_{xy}(x_۱ , y_۱) + f_{xy}(x_۲, y_۲)\,]$$
$$= (3/\pi б^{۲})\,e^{-3^{۲}/۲б^{۲}} \quad , \quad ۰ < 3 < \infty \quad , \quad |w| < \pi/۲$$

$$f_z\,(3) = \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} f_{zw}(3,w)\,dw = (3/б^{۲})\,e^{-3^{۲}/۲б^{۲}} \quad , \quad ۰ < 3 < \infty$$

که بیانگر متغیر تصادفی Rayleigh با پارامتر $б^{۲}$ بوده و

$$f_w(w) = \int_{۰}^{\infty} f_{zw}(3,w)\,d3 = ۱/\pi \quad , \quad |w| < \pi/۲$$

که بیانگر متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[-\pi/۲, \pi/۲]$ می باشد .

علاوه بر آن چون $f_{zw}(3,w) = f_z(3)\,f_w(w)$

می باشد می توان نتیجه گرفت که Z , W متغیرهای تصادفی مستقل هستند .

از بحث فوق می توان استفاده کرده و تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی که تابعی از دو متغیر تصادفی دیگر است را تعیین کرد .

فرض کنید $Z = g\,(X,Y)$

می باشد . می توان متغیر تصادفی کمکی دیگری به صورت زیر تعریف کرد :

$W = X$ یا $W = Y$

و با تعیین $f_{zw}(3,w)$ می توان تابع چگالی احتمال Z را نیز به دست آورد .

برای مثال اگر $Z = X + Y$ بوده و فرض کنیم $W = Y$

باشد در آن صورت $x_1=3-w$, $y_1=w$

بوده و ژاکوبین تبدیل عبارت است از :

$$j(x,y)=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۱$$

بنابراین

$$f_{zw}(x,y)=f_{xy}(x_1,y_1)=f_{xy}(3-w,w)$$

$$f_z(3)=\int f_{zw}(3,w)dw=\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(3-w,w)dw$$

که همان نتیجه (۲۲-۳) می باشد . بدیهی است که اگر Y, X

مستقل از یکدیگر باشند ، رابطه فوق به کانوولوشن

$f_x(3)$, $f_y(3)$ تبدیل می شود

اکنون فرض کنید تابعی از دو متغیر تصادفی X, Y به صورت $Z=g(X,Y)$ داده شده و می خواهیم متوسط متغیر تصادفی Z را تعیین کنیم .

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} 3 f_z(3)\, d3$$ (۳-۳۵)

پس برای تعیین متوسط Z نیاز به شناخت یا تعیین $f_z(3)$ است .

راه حل دیگری که نیاز به محاسبه $f_z(3)$ ندارد عبارت است از :

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{xy}(x,y)\, dx dy$$ (۳-۳۶)

بدیهی است که متوسط تابع $g(X)$ از رابطه فوق قابل تعیین است .

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{xy}(x,y)\, dx dy=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x)\, dx$$ (۳-۳۷)

اگر متغیرهای تصادفی X, Y از نوع گسسته باشند در آن صورت

$$E[g(X,Y)]=\sum_i \sum_j g(x_i,y_j) p_{ij}$$ (۳-۳۸)

چون متوسط آماری یک اپراتور خطی است می توان گفت :

$$E\left\{\sum_k a_k g_k(X,Y)\right\}=\sum_k a_k E[g_k(X,Y)]$$ (۳-۳۹)

به خصوص باید توجه کرد که

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$$ (۳-۴۰)

ولی باید گفت به طور کلی

$$E[XY] \neq E[X]E[Y] \qquad (۳-۴۱)$$

مورد استثنایی قابل توجه حالتی است که $g(X,Y) = g_1(X)\,g_2(Y)$
بوده و متغیرهای تصادفی Y, X مستقل از
یکدیگر باشند . در این شرایط می توان نتیجه گرفت

$$E[g(X,Y)] = E[g_1(X)\,g_2(Y)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\,g_2(y)\,f_{xy}(x,y)\,dx\,dy \qquad (۳-۴۲)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_x(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y) f_y(y)\,dy = E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$$

پس رابطه (۳-۴۱) هنگامی به تساوی تبدیل خواهد شد
که دو متغیر تصادفی X و Y مستقل از یکدیگر باشند .
در مورد یک متغیر تصادفی و توصیف رفتار متوسط آن ،
پارامترهای متوسط و واریانس را تعریف کردیم . چگونه می توان
رفتار متقابل بین دو متغیر تصادفی را توصیف کرد؟ در این مرحله از
بررسی تعریف واریانس را تعمیم داده و تابع کوواریانس (Covariance)
بین دو متغیر تصادفی X و Y را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$C_{xy} = E[(X - \eta_x)(Y - \eta_y)] \qquad (۳-۴۳)$$

با بسط و ساده نمودن طرف راست رابطه فوق داریم

$$C_{xy} = E[XY] - E[X]\,E[Y] \qquad (۳-۴۴)$$

به سهولت می‌توان ملاحظه کرد که

$$|C_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y \qquad (۳-۴۵)$$

برای اثبات رابطهٔ (۳-۴۵) می توان گفت با فرض $U=aX+Y$ خواهیم داشت.

$$\mathrm{Var}(U) = E\left[\left\{a(X-\eta_x)+(Y-\eta_y)\right\}^{۲}\right]$$
$$= a^{۲}\sigma_x^{۲}+۲aC_{xy}+\sigma_y^{۲} \geq ۰$$

رابطهٔ فوق یک معادله درجه دو بر حسب متغیر a بوده و به ازاء جمیع مقادیر a این معادله غیر منفی است پس Δ' آن باید غیر مثبت باشد یعنی

$$[C_{xy}]^{۲} - \sigma_x^{۲}\sigma_y^{۲} \leq ۰$$

که منجر به رابطه (۳-۴۵) خواهد شد

از طرف دیگر می توان ضریب‌هم بستگی (Correlation Coefficient) بین دو متغیر تصادفی Y, X را به صورت زیر تعریف کرد :

$$\rho_{xy} = C_{xy} / \sigma_x \sigma_y \quad , \quad -۱ \leq \rho_{xy} \leq ۱ \qquad (۳-۴۶)$$

و یا $C_{xy} = \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y$

اگر $\rho_{xy}=۰$ باشد در آن صورت Y, X را متغیرهای تصادفی ناهم‌بسته نامند . در این حالت

$$\rho_{xy}=C_{xy}=۰ \quad , \quad E[XY]=E[X]E[Y] \qquad (۳-۴۷)$$

دو متغیر تصادفی Y, X را هنگامی متعامد (Orthogonal) نامند ، که

$$E[XY]=۰ \qquad (۳-۴۸)$$

از مقایسه دو رابطه (۴۷-۳) و (۴۸-۳) می توان گفت که :

اگر یکی از دو متغیر X یا Y دارای متوسط صفرباشد درآن صورت تعامد دو متغیر تصادفی به مفهوم ناهم‌بستگی آنها و بالعکس می‌باشد .

ازطرف دیگر اگر X و Y دو متغیرتصادفی مستقل از هم باشند با استناد به رابطه (۴۲-۳) می‌توان گفت :

$$E[XY]=E[X]E[Y] \qquad (۳-۴۹)$$

ازمقایسه دو رابطه (۴۷-۳) و (۴۹-۳) نتیجه می‌گیریم که استقلال دو متغیر تصادفی‌به مفهوم ناهم‌بستگی‌آنها است .طبعاً اگر دو متغیر تصادفی‌از نظر آماری مستقل ازیکدیگر باشند در آن صورت هیچگونه هم بستگی بین آنها نمی‌تواند وجود داشته باشد ($\rho_{xy}=۰$).

به هرحال عکس این مطلب به طور کلی صحت ندارد . در مثال زیر نشان داده می‌شودکه متغیرهای تصادفی بدون آنکه مستقل باشند می‌توانند ناهم‌بسته باشند .

مثال ۱۱-۳

فرض کنید $X\sim U(۰,۱)$ و $Y\sim U(۰,۱)$ بوده و مستقل از یکدیگر می‌باشند متغیرهای $Z=X+Y$ و $W=X-Y$ را تعریف می کنیم . نشان دهید که Z و W مستقل از یکدیگر نیستند ولی نا هم‌بسته می‌باشند .

دو معادله $z=x+y$ و $w=x-y$ فقط دارای یک دسته جواب زیر هستند .

$$x=\frac{z+w}{۲} \quad و \quad y=\frac{z-w}{۲}$$

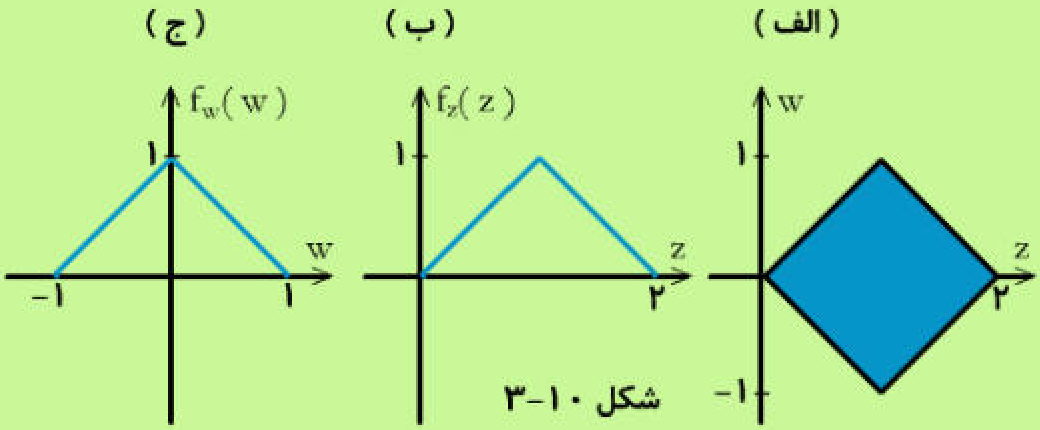
علاوه بر این

$z>|w|$ و $z-w\leq ۲$ و $z+w\leq ۲$ و $-۱<w<۱$ و $۰<z<۲$

$|j(z,w)|=۱/۲$ می باشد.

بنابراین با توجه به شکل (۱۰-۳) می‌توان نتیجه گرفت که

$$f_{zw}(z,w)=\begin{cases} \frac{1}{2} & ,\ 0<z<2\ ,\ -1<w<1\ ,\ z+w\le 2 \\ & ,\ z-w\le 2\ ,\ |w|\le z \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



شکل ۱۰-۳

$$f_z(z)=\int f_{zw}(z,w)\,dw=\begin{cases} \int_{-z}^{z}\frac{1}{2}\,dw=z & 0<z<1 \\ \int_{z-2}^{2-z}\frac{1}{2}\,dw=2-z & 1<z<2 \end{cases}$$

و یا با محاسبه مستقیم (با توجه به استقلال Y, X) می‌توان نوشت

$$f_z(z)=f_x(z)*f_y(z)=\begin{cases} z & 0<z<1 \\ 2-z & 1<z<2 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$f_w(w)=\int f_{zw}(z,w)\,dz=\int_{|w|}^{2-|w|}\frac{1}{2}\,dz=\begin{cases} 1-|w| & -1<|w|<1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

آشکار است که $f_{zw}(3, w) \neq f_z(3) f_w(w)$

می باشد . بنابراین W,Z مستقل از یکدیگر نمی باشند .

به هر حال $E(ZW) = E[(X+Y)(X-Y)] = E(X^2) - E(Y^2) = 0$

$$E(W) = E(X - Y) = 0$$

است و در نتیجه

$$C_{zw} = Cov(Z,W) = E(ZW) - E(Z)\,E(W) = 0$$

که به مفهوم ناهم بستگی دو متغیر تصادفی Z و W می باشد .

بنا به تعریف گشتاور توأم متغیرهای تصادفی Y, X از مرتبه $k+r = n$

عبارت است از متوسط حاصلضرب X^kY^r .

$$m_{kr} = E(X^kY^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r f_{xy}(x,y)\,dx\,dy \qquad (۳-۵۰)$$

بنابر این $m_{10} = \eta_x$ و $m_{01} = \eta_y$ گشتاورهای مرتبه اول بوده و گشتاورهای مرتبه دوم عبارتند از

$$m_{20} = E(X^2) \quad m_{11} = E(XY) \quad m_{02} = E(Y^2)$$

گشتاورهای مرکزی توأم X و Y عبارتند از گشتاورهای $X - \eta_x$ و $Y - \eta_y$ یعنی

$$\mu_{kr} = E\left\{(X-\eta_x)^k (Y-\eta_y)^r\right\} \qquad (۳-۵۱)$$

بدیهی است که $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$ هستند و

$$\mu_{11} = C_{xy} \quad \mu_{20} = \sigma_x^2 \quad \mu_{02} = \sigma_y^2$$

مشابه مورد یک متغیر تصادفی می توان برای دو متغیر تصادفی تابع مشخصه توأم را تعریف کرده و از آن برای محاسبات ساده‌تر گشتاورها استفاده نمود .

بنا به تعریف تابع مشخصه توأم X و Y عبارت است از

$$\Phi_{xy}(\omega_1,\omega_2) = E[e^{j(\omega_1 X+\omega_2 Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 x+\omega_2 y)} f_{xy}(x,y)dxdy \quad (۳-۵۲)$$

با توجه به رابطه بالا و فرمول معکوس تبدیل فوریهٔ دوبعدی می‌توان نتیجه گرفت

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\omega_1,\omega_2) e^{-j(\omega_1 x+\omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (۳-۵۳)$$

لگاریتم تابع مشخصه $\Phi_{xy}(\omega_1,\omega_2)$ را تابع مشخصه توأم لگاریتمی X,Y نامند .

$$\psi_{xy}(\omega_1,\omega_2) = \operatorname{Ln} \Phi_{xy}(\omega_1,\omega_2) \quad (۳-۵۴)$$

چند خاصیت مهم تابع مشخصه توأم دو متغیر تصادفی عبارت است از

$$|\Phi_{xy}(\omega_1,\omega_2)| \le \Phi_{xy}(0,0) = 1 \quad (۳-۵۵)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$E(XY) = \frac{1}{j^2} \left.\frac{\partial^2 \Phi_{xy}(\omega_1,\omega_2)}{\partial\omega_1 \partial\omega_2}\right|_{\omega_1=\omega_2=0} \quad (۳-۵۶)$$

اگر Y,X دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند درآن صورت با استفاده از رابطه(۳-۵۲) می توان نتیجه گرفت

$$\Phi_{xy}(\omega_1,\omega_2)=E(e^{j\omega_1 X})E(e^{j\omega_2 Y})=\Phi_x(\omega_1)\Phi_y(\omega_2) \quad (۳-۵۷)$$

همچنین تابع مشخصه کناری متغیرهای تصادفی X , Y را می‌توان از تابع مشخصه توأم این دو متغیر تعیین کرد.

$$\Phi_x(\omega)=\Phi_x(\omega_1)=\Phi_{xy}(\omega_1,0) \text{ و } \Phi_y(\omega)=\Phi_y(\omega_2)=\Phi_{xy}(0,\omega_2) \quad (۳-۵۸)$$

و بالاخره اگر $Z=aX+bY$ باشد درآن صورت

$$\Phi_z(\omega)=E\left\{e^{j(aX+bY)\omega}\right\}=\Phi_{xy}(a\omega,b\omega) \quad (۳-۵۹)$$

بنابراین

$$\Phi_z(1)=\Phi_{xy}(a,b)$$

اکنون فرض کنید که X, Y دو متغیرهای تصادفی توأماً نرمال

$$N(\eta_x,\eta_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2,\rho)$$

می‌باشند . می‌توان نشان داد که تابع چگالی احتمال توأم آنها عبارت است از :

$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\eta_x)^2}{\sigma_x^2}-2\rho\frac{(x-\eta_x)(y-\eta_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-\eta_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right\} \quad (۳-۶۰)$$

اگر تابع چگالی احتمال فوق را در رابطه (۳-۵۲) قرار دهیم

تابع مشخصه توأماً نرمال دو متغیر تصادفی X, Y برابر است با

$$\Phi_{xy}(\omega_1, \omega_2) = e^{j(\eta_x\omega_1 + \eta_y\omega_2)} \quad e^{-(\omega_1^2\sigma_x^2 + 2\rho\,\sigma_x\sigma_y\omega_1\omega_2 + \omega_2^2\sigma_y^2)/2}$$

(۳-۶۱)

روش ساده تر دیگر استفاده از این مفهوم است که هرگونه ترکیب خطی دو متغیر تصادفی نرمال خود نیز یک متغیر تصادفی نرمال خواهد بود .

پس اگر $Z = \omega_1 X + \omega_2 Y$ فرض شود ، این متغیر نیز نرمال خواهد بود و

$$\Phi_z(\omega) = e^{j\omega\eta_z} e^{-\sigma_z^2\omega^2/2} \qquad (۳-۶۲)$$

هم چنین می توان روابط زیر را به سهولت نتیجه گرفت

$$\eta_z = \omega_1\eta_x + \omega_2\eta_y \quad ، \sigma_z^2 = \omega_1^2\sigma_x^2 + 2\rho\,\sigma_x\sigma_y\omega_1\omega_2 + \omega_2^2\sigma_y^2$$

و از قراردادن نتایج فوق در رابطه (۶۲-۳) تابع مشخصه $\Phi_z(\omega)$ به دست می آید .حال به استناد به رابطه (۵۹-۳) و توجه به حالت خاص آن یعنی

$$\Phi_{xy}(a, b) = \Phi_z(1)$$

رابطه (۶۱-۳) اثبات می گردد .

نکته قابل توجه در این مضمون عبارت است از آن که ، اگر $\rho = 0$ باشد یعنی دو متغیرتصادفی Y, X که توأماً نرمال هستند در عین حال ناهم‌بسته باشند در آن صورت به سهولت می توان مشاهده کرد که

$$\Phi_{xy}(\omega_1 , \omega_2) = \Phi_x(\omega_1)\Phi_y(\omega_2)$$

بوده و در نتیجه این دو متغیر تصادفی مستقل از یکدیگر می باشند ،

بنابراین می‌توان گفت که در این مورد

$$f_{xy}(x , y) = f_x(x) f_y(y)$$

پس اگر Y, X دو متغیر توأماً گوسی باشند ،

ناهم‌بستگی آنها به مفهوم استقلال آنها و بالعکس می‌باشد .

بار دیگر قابل تاکید است که نتایج فوق مبتنی بر این امر بود که هرگونه ترکیب خطی دو متغیر تصادفی نرمال خود نیز یک متغیر نرمال است .

نکته فوق را می توان تعمیم داده و اثبات کرد که دو ترکیب خطی اختیاری متغیرهای تصادفی توأماً گوسی (مستقل یا وابسته)

خود نیز متغیرهای تصادفی توأماً گوسی خواهد بود .

در بخش های قبل ملاحظه کردیم که برای بروز کردن اطلاعات در مورد یک پیشامد مبتنی بر اطلاع و شناخت از سایر پیشامدهای مرتبط ، توابع چگالی احتمال شرطی مورد استفاده قرار می گیرند .

در این بخش مسأله ای را بررسی و تحلیل می کنیم که در آن پیشامد مربوطه یک متغیر تصادفی است که به متغیر تصادفی مورد نظر وابسته است .

می‌دانیم که تابع توزیع X مشروط به پیشامد B عبارت است از :

$$F_x(x/B) = P(X(\xi) \leq x/B) = \frac{P((X(\xi) \leq x) \cap B)}{P(B)}$$

حال فرض کنید که

$$B = \{ y_1 < Y(\xi) \leq y_2 \}$$

از ادغام دو رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت :

$$F_x(x/y_1 < Y \le y_2) = \frac{P(X(\xi) \le x ,\, y_1 < Y \le y_2)}{P(y_1 < Y(\xi) \le y_2)}$$

$$= \frac{F_{xy}(x, y_2) - F_{xy}(x, y_1)}{F_y(y_2) - F_y(y_1)} \qquad (۳-۶۳)$$

رابطه فوق را نیز می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد .

$$F_x(x/y_1 < Y \le y_2) = \frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y_1}^{y_2} f_{xy}(u, v)\, du dv}{\int_{y_1}^{y_2} f_y(v)\, dv} \qquad (۳-۶۴)$$

در حالت حدی رابطه فوق را به صورت زیر می توان نوشت :

$$F_{x/y}(x/Y = y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{xy}(u, y)\, du}{f_y(y)} \qquad (۳-۶۵)$$

و با گرفتن مشتق نسبت به x داریم .

$$f_{x/y}(x/Y = y) = \frac{f_{xy}(x, y)}{f_y(y)} \qquad (۳-۶۶)$$

اگر $f_{x/y}(x/Y = y)$ را به صورت $f_{x/y}(x/y)$

بنویسیم رابطه (۶۶-۳) را به شکل ساده‌تر زیر می‌توان نوشت :

$$f_{x/y}(x/y) = \frac{f_{xy}(x, y)}{f_y(y)} \qquad (۳-۶۷)$$

و مشابهاً

$$f_{y/x}(y/x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}$$

اگر متغیرهای تصادفی X , Y مستقل باشند در آن صورت

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x) f_y(y)$$

بوده و رابطه (۶۷-۳) به شکل زیر ساده تر می شود :

$$f_{x/y}(x/y) = f_x(x)$$

در مورد متغیرهای تصادفی گسسته رابطه (۶۷-۳) را می‌توان

بدین صورت بیان کرد :

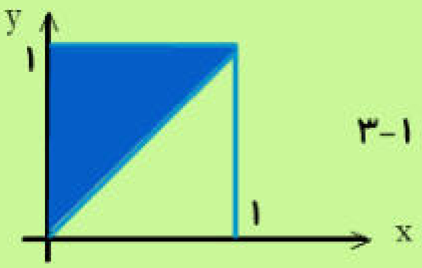
$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \quad (۳-۶۸)$$

مثال ۱۲-۳

فرض کنید که :

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} k & , \quad ۰ < x < y < ۱ \\ ۰ & , \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

می باشد . توابع چگالی احتمال شرطی $f_{y/x}(y/x)$, $f_{x/y}(x/y)$ را تعیین کنید .



شکل ۱۱-۳

تابع چگالی احتمال توأم در ناحیه هاشور خورده شکل ۱۱-۳ ثابت است . پس

$$\iint f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^y k\,dx\,dy = \int_0^1 k\,y\,dy = \frac{k}{2} = 1 \rightarrow k = 2$$

مشابهاً

$$f_x(x) = \int f_{xy}(x,y)dy = \int_x^1 k\,dy = k(1-x)\,,\quad 0<x<1$$

و

$$f_y(y) = \int f_{xy}(x,y)dx = \int_0^y k\,dx = ky\,,\quad 0<y<1$$

با استفاده از رابطه (۶۷-۳) می‌توان نوشت :

$$f_{x/y}(x/y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{1}{y}\,,\quad 0<x<y<1$$

$$f_{y/x}(y/x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} = \frac{1}{1-x}\,,\quad 0<x<y<1$$

نکته مهم و قابل توجه در رابطه با توابع احتمال شرطی

رابطه زیر است که در واقع نسخه تابع چگالی احتمال قضیه بیز می باشد .

$$f_{y/x}(y/x) = \frac{f_{x/y}(x/y)\ f_y(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{x/y}(x/y)\ \ f_y(y)\ dy} \qquad (۳-۶۹)$$

به منظور درک اهمیت رابطه (۶۹-۳) ضروری است که به مسائل مخابرات مراجعه کرد ، مسائلی که درآنها مشاهدات را می‌توان برای بروز کردن شناخت خود درباره پارامترهای مجهول به کار برد . با مثال ساده ای این نکته را بررسی می‌کنیم .

مثال ۱۳-۳

فاز تصادفی مجهول θ در بازه $(\,۰\,,\,۲\pi\,)$ به طور یکنواخت توزیع شده و $r=\theta+n$ است به طوری که $n \sim N(۰, \sigma^۲)$ می‌باشد . تابع $f\,(\,\theta/r\,)$ را تعیین کنید .

در ابتدا تقریباً هیچگونه اطلاعی در مورد متغیر تصادفی θ در دست نیست و بدین علت فرض می کنیم که تابع چگالی احتمال پیشین یکنواخت است (دربازه $(\,۰\,,\,۲\pi)$)

در معادله $r=\theta+n$ ، n را نویز و r را سیگنال مشاهده شده (یا اندازه گیری شده) تلقی می‌کنیم.

منطقی است که فرض کنیم θ و n مستقل از یکدیگر هستند. در این حالت

$$f\,(\,r/\theta=\theta\,)\sim N\,(\,\theta,\sigma^۲\,)$$

چون به ازاء $\theta=\theta$ ثابت ، متغیر $r=\theta+n$ مانند n رفتار خواهد کرد.

با به کار بردن رابطه (۶۹-۳) تابع چگالی احتمال پسین

θ مشروط به r عبارت است از :

$$f(\theta/r)=\frac{f(r/\theta)\ f_\theta(\theta)}{\int_0^{2\pi} f(r/\theta)\ f_\theta(\theta)\ d\theta}=\frac{e^{-(r-\theta)^2/2\sigma^2}}{\int_0^{2\pi} e^{-(r-\theta)^2/2\sigma^2}\,d\theta}$$

$$f(\theta/r)=\Phi(r)^{-(\theta-r)^2/2\sigma^2} \quad , 0<\theta<2\pi$$

که در آن

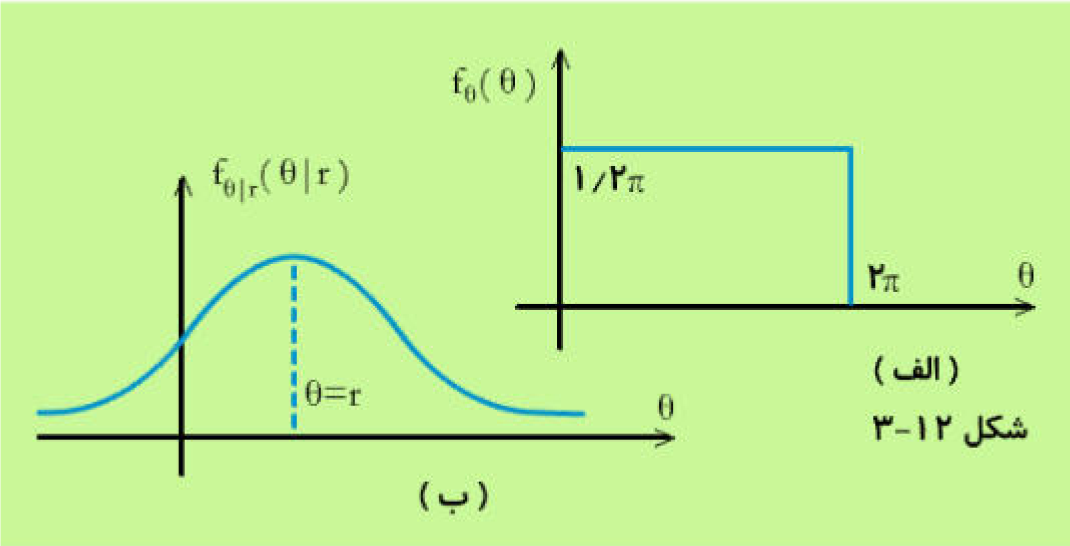
$$\Phi(r)=\frac{1}{\int_0^{2\pi} e^{-(r-\theta)^2/2\sigma^2}\,d\theta}$$

توجه کنید که شناخت و آگاهی حاصل از مشاهده

r در تابع چگالی احتمال پسین θ

در شکل ۱۲-۳ منعکس شده است. این تابع دیگر مانند تابع چگالی احتمال پیشین

هموار نبوده و احتمالات بالاتر را در مجاورت $\theta=r$ نشان می‌دهد .



شکل ۱۲-۳

می‌توان از توابع چگالی احتمال شرطی استفاده کرده

و متوسط شرطی را تعریف کرد.

$$E\{\, g(X)\, /B \,\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_x(x/B)dx \qquad (۳-۷۰)$$

با استدلال حدی رابطه زیر نتیجه می شود :

$$\eta_{x/y} = E\{X/Y=y\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{x/y}(x/y)\, dx \qquad (۳-۷۱)$$

باید توجه کرد که $\eta_{x/y}$ تابعی از y خواهد بود.

به نحو مشابه ، واریانس شرطی X مشروط به $Y=y$ عبارت است از

$$\sigma^2_{x/y} = \mathrm{Var}\ (X/Y) = E\ \{(X - \eta_{x/y})^2 / Y=y\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (X - \eta_{x/y})^2\, f_{x/y}(x/y)\, dx$$

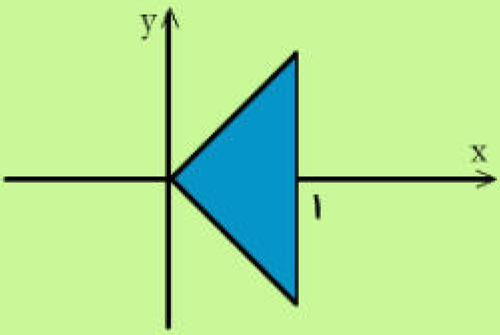
$$= E\{X^2 / Y=y\} - \{E(X/Y=y)\}^2 \qquad (۳-۷۲)$$

مثال ۱۴-۳

فرض کنید که

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} 1 & 0<|y|<x<1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

توابع $E(Y/X)$, $E(X/Y)$ را به دست آورید.



شکل ۳-۱۳

همان گونه که شکل ۳-۱۳ نشان می دهد ، تابع

$f_{xy}(x,y)$ در ناحیه هاشورخورده برابر

یک و در سایرنواحی صفراست.

پس

$$f_x(x)=\int_{-x}^{x} f_{xy}(x,y)dy = 2x \quad , 0<x<1$$

و

$$f_y(y) = \int_{|y|}^{1} (1)\, dx = 1-|y| \quad , \quad |y|<1$$

بنابراین

$$f_{x/y}(x/y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)} = \frac{1}{1-|y|} \quad , 0<|y|<x<1$$

و

$$f_{y/x}(y/x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)} = \frac{1}{2x} \quad , \quad 0<|y|<x<1$$

$$E(X/Y) = \int x\, f_{x/y}(x/y)\, dx = \frac{1+|y|}{2}, \quad |y|<1$$

$$E(Y/X) = \int y\, f_{y/x}(y/x)\, dy = 0 \quad , \quad 0<X<1$$

مفهوم تابع متوسط شرطی را می‌توان تعمیم داده و شکل کلی‌تری را تعریف کرد.

به عبارت دیگر

$$E[g(X,Y)] = E_y\{ E_x\{ g(X,Y) / Y=y \}\} \quad (۳-۷۳)$$

با استناد به رابطه (۳-۷۳) و در مورد خاص زیر می توان نوشت :

$$E(X) = E_Y\{ E_X(X / Y=y) \} \quad (۳-۷۴)$$

و مشابهاً

$$E(Y) = E_X\{ E_Y(Y / X=x) \}$$

و با استدلال مشابه می توان به رابطه زیر رسید :

$$Var(X) = E_Y(Var(X / Y=y)) \quad (۳-۷۵)$$

در پایان باید اضافه کرد که توابع متوسط شرطی نقش مهمی را در نظریه تخمین و پیش بینی ایفاء کرده و در فصول آتی با کاربرد آنها بیشتر آشنا خواهیم شد .

مسایل فصل ۳

۳-۱ متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و دارای توزیع یکسان به صورت زیر هستند:

$$f_x(x)=e^{-x}U(x) \qquad f_y(y)=e^{-y}U(y)$$

تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی ادامه را بیابید.

(الف) $X+Y$ ، (ب) $X-Y$ ، (ج) XY ، (د) X/Y ،

(ه) $\min(X,Y)$ ، (و) $\max(X,Y)$ ، (ز) $\min(X,Y)/\max(X,Y)$

۳-۲ متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و دارای توزیع یکنواخت در فاصلهٔ $(0,a)$ است.

مطلوبست تابع چگالی احتمال (الف) X/Y ، (ب) $Y/(Y+X)$ و (ج) $|X-Y|$

۳-۳ متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس مشترک $\sigma^۲$ هستند، یعنی

$X \approx N(۰,\sigma^۲)$ ، $Y \approx N(۰,\sigma^۲)$ و $f_{xy}(x,y)=f_x(x)f_y(y)$

است. تابع چگالی احتمال

(الف) $Z=\sqrt{X^۲+Y^۲}$ ، (ب) $W=X^۲+Y^۲$ ، (ج) $U=X-Y$ را بیابید.

۳-۴ تابع چگالی احتمال مشترک متغیرهای تصادفی X و Y با رابطهٔ زیر داده می شوند:

$$f_{xy}(x,y)=\begin{cases} ۱ & ۰ \le x \le ۲, ۱ \le y \le ۲, ۲y \le x \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

نشان دهید که تابع چگالی احتمال $Z= X+Y$ به صورت زیر است:

$$f_{xy}(x,y)=\begin{cases} (۱/۳)z & ۰ < z < ۲ \\ ۲-(۲/۳)z & ۲ < z < ۳ \\ ۰ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

۳-۵ متغیرهای تصادفی X و Y در ناحیهٔ مثلثی $۰ \le y \le x \le ۱$ به صورت یکنواخت توزیع شده اند.

نشان دهید که (الف) $Z=Y/X$ دارای چگالی $f_z(z)=۱/z^۲$ برای $z \ge ۱$ و جاهای دیگر صفر است، (ب) چگالی XY را تعیین کنید.

۳-۶ اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و دارای توزیع گاما با پارامترهای مشترک α و β باشند،

تابع چگالی احتمال (الف) $X+Y$ ، (ب) X/Y و (ج) $X/(X+Y)$ را بیابید.

۳-۷ متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و دارای توزیع یکنواخت در فاصلهٔ $(\text{۰},\text{۱})$ هستند. تابع چگالی مشترک $X+Y$ و $X-Y$ را بیابید.

۳-۸ اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و دارای توزیع ری لی با پارامتر مشترک $\sigma^{\text{۲}}$ باشند، تابع چگالی احتمال X/Y را بیابید.

۳-۹ متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و $Z=X+Y$ می باشند. نشان دهید که اگر

$$f_x(x)=ce^{-cx}U(x) \qquad f_z(z)=c^{\text{۲}}ze^{-cz}U(z)$$

باشد، آن گاه $f_y(y)$ را بیابید.

۳-۱۰ اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و $N(\text{۰},\text{۴})$ می باشند. $f_z(z)$ و $F_z(z)$ را اگر (الف) $Z=\text{۲}X+\text{۳}Y$ و (ب) $Z=X/Y$ باشد.

۳-۱۱ متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و

$$f_x(x)=\frac{x}{\alpha^{\text{۲}}}e^{-x^{\text{۲}}/\text{۲}\alpha^{\text{۲}}}U(x) \qquad f_y(y)=\begin{cases} \text{۱}/\pi\sqrt{\text{۱}-y^{\text{۲}}} & |y|<\text{۱} \\ \text{۰} & |y|<\text{۱} \end{cases}$$

نشان دهید که متغیر تصادفی $Z=XY$ به صورت $N(\text{۰},\alpha^{\text{۲}})$ است.

۳-۱۲ نشان دهید که

(الف) کانوولوشن دو چگالی نرمال نیز چگالی نرمال است.

(ب) کانوولوشن دو چگالی کوشی نیز چگالی کوشی است.

۳-۱۳ فرض کنید X طول عمر نوع خاصی لامپ رشته ای را نشان می دهد و Y طول عمر لامپ تعویضی بعد از سوختن اولین لامپ باشد. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل با چگالی نمائی مشترک با پارامتر λ هستند.

احتمال این که مجموع طول عمر ترکیب آن ها بیش از ۲λ باشد را بیابید.

احتمال این که طول عمر لامپ تعویضی به اندازهٔ λ بیشتر از اصلی باشد، چقدر است؟

۳-۱۴ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل با چگالی نمائی مشترک با پارامتر λ هستند. تابع چگالی احتمال

(الف) $Z=Y/\max(X,Y)$ و (ب) $W=X/\max(X,۲Y)$ را بیابید.

۳-۱۵ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل با چگالی مشترک $f_x(x)=\beta^{\alpha}\alpha x^{\alpha-۱}$ برای $۰<x<\beta$ و جاهای دیگر ($\alpha \geq ۱$) صفر باشد.

فرض کنید $Z=\min(X,Y)$ و $W=\max(X,Y)$ است.

(الف) تابع چگالی احتمال $X+Y$، (ب) تابع چگالی احتمال Z و W را بیابید،

(ج) نشان دهید که Z و Z/W متغیر های تصادفی مستقل هستند.

۳-۱۶ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل با میانگین صفر و واریانس واحد باشند.

(الف) تابع چگالی احتمال $X/|Y|$ را بیابید.

(ب) فرض کنید $U=X+Y$ و $V=X^۲+Y^۲$ باشند، آیا U و V مستقل هستند؟

۳-۱۷ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مشترک نرمال با $\mu_x,\mu_y,\sigma_x^۲,\sigma_y^۲$ و r باشند.

شرایط لازم و کافی برای مستقل بودن $X+Y$ و $X-Y$ را بیابید.

۳-۱۸ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل دارای توزیع یکسان نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ باشند. تعریف می کنیم :

$$U=\frac{X^۲-Y^۲}{\sqrt{X^۲+Y^۲}} \qquad V=\frac{XY}{\sqrt{X^۲+Y^۲}}$$

(الف) تابع چگالی احتمال مشترک $f_{uv}(u, v)$ متغیرهای تصادفی U و V را بیابید.

(ب) نشان دهید U و V متغیرهای تصادفی مستقل و نرمال هستند.

(ج)نشان دهید که $[(x-y)^2 - 2y^2] / \sqrt{x^2+y^2}$ متغیر تصادفی نرمال است.

بنابراین تابع غیرخطی از متغیرهای تصادفی نرمال منجر به متغیرهای تصادفی نرمال می شود.

۳-۱۹ فرض کنید Z دارای توزیع F با (m, n) درجهٔ آزادی باشد.

(الف) نشان دهید که $1/Z$ نیز دارای توزیع F با (m, n) درجهٔ آزادی است.

(ب)نشان دهید که $mZ/(mZ+n)$ دارای توزیع بتا است.

۳-۲۰ فرض کنید:

$$f_{xy}(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(x+y)} & 0<x<y<\infty \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

با تعریف

$$W=Y/X \quad \text{و} \quad Z=X+Y$$

تابع چگالی احتمال مشترک Z و W را بیابید.

آیا Z و W متغیرهای تصادفی مستقل هستند؟

۳-۲۱ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و X به صورت $N(0,\sigma^2)$ و Y یکنواخت در فاصلهٔ $(0, \pi)$ است.

نشان دهید که اگر $Z=X+a\cos Y$ باشد، آن گاه

$$f_z(z)=\frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} e^{-(z-a\cos y)^2/2a^2}\,dy$$

۳-۲۲ فرض کنید متغیرهای تصادفی X نوع گسسته، مستقل با $P\{X=n\}=a_n$ و Y از نوع پیوسته و مستقل از X باشد.
نشان دهید اگر $Z=X+Y$ و $W=XY$ باشد، آن گاه

$$f_z(z)=\sum_n f_y(z-x_n)p_n \qquad f_w(w)=\sum_n \frac{۱}{|x_n|} f_y\left(\frac{w}{x_n}\right)p_n$$

۳-۲۳ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی جرمی مشترک

$$P\{X=k\}=p\,q^k \qquad k=۰,۱,۲,\dots \qquad q=p-۱$$

باشند.

(الف) نشان دهید $\min(X,Y)$ و $X-Y$ متغیرهای تصادفی مستقل هستند.
(ب) نشان دهید $Z=\min(X,Y)$ و $W=\max(X,Y)-\min(X,Y)$ متغیرهای تصادفی مستقل می باشند.

۳-۲۴ فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مشترک نرمال با میانگین صفر باشند. نشان دهید که تابع چگالی آنها به صورت زیر است:

$$f(x_۱, x_۲)=\frac{۱}{۲\pi\sqrt{\Delta}}\exp\left\{-\frac{۱}{۲} XC^{-۱}X'\right\} \qquad C=\begin{bmatrix} \mu_{۱۱} & \mu_{۱۲} \\ \mu_{۲۱} & \mu_{۲۲} \end{bmatrix}$$

در این رابطه

$$\Delta=\mu_{۱۱}\mu_{۲۲}-\mu_{۱۲}^{۲} \text{ و } \mu_{ij}=E\{X_iX_j\},\ X:[x_۱, x_۲]$$

هستند.

۳-۲۵ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال باشند، آن گاه

$$P\{XY<0\}=G(\frac{\eta_x}{\sigma_x})-G(\frac{\eta_y}{\sigma_y})-2G(\frac{\eta_x}{\sigma_x})G(\frac{\eta_y}{\sigma_y})$$

۳-۲۶ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با میانگین صفر به ترتیب با واریانس σ_1^2 و σ_2^2، یعنی $X\approx N(0,\sigma_1^2)$ و $Y\approx N(0,\sigma_2^2)$ است. با فرض

$$Z=aX+bY+c \quad c\neq 0$$

(الف) تابع مشخصهٔ $\Phi_z(u)$ از Z، (ب) با استفاده از $\Phi_z(u)$ نتیجه بگیرید که Z نیز متغیر تصادفی نرمال و (ج) با میانگین و واریانس Z را بیابید.

۳-۲۷ فرض کنید توزیع شرطی X برای $Y=n$ مشخص داده شده دو جمله ای با پارامتر n و p_1 است. بعلاوه Y متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامتر m و p_2 است. نشان دهید که X نیز دو جمله ای است. پارامترهای آن را بیابید.

۳-۲۸ دو متغیر تصادفی X و Y دارای توزیع مشترک بر ناحیهٔ $0<x<y<1$ برای بعضی k به صورت

$$f_{xy}(x,y)=\begin{cases} kx & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

باشد. k را تعیین کنید. واریانس X و Y را بیابید. کوواریانس بین X و Y چقدر است؟

۳-۲۹ متغیر تصادفی X پواسن با پارامتر λ و Y متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^{2} است. بعلاوه X و Y مستقل هستند.

(الف) تابع مشخصهٔ مشترک X و Y را بیابید.

(ب) با تعریف $Z=X+Y$ تابع مشخصهٔ Z را بیابید.

۳-۳۰ دو متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع نمائی با پارامتر مشترک λ است.

(الف) $E\{\min(X,Y)\}$ و (ب) $E\{\max(2X,Y)\}$ را بیابید.

۳-۳۱ دو متغیر تصادفی X و Y دارای توزیع مشترک نرمال با پارامترهای $N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho_{xy})$ است.

(الف) $E\{Y \mid X = x\}$ و (ب) $E\{X^{2} \mid Y = y\}$ را بیابید.

۳-۳۲ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل به ترتیب با واریانس σ_1^2 و σ_2^2 باشند. برای مجموع زیر a را طوری بیابید که واریانس Z را کمینه کند.

$$Z=aX+(1-a)Y \qquad 0 \le a \le 1$$

۳-۳۳ فرض کنید متغیر تصادفی X نوع گسسته باشد که مقدار x_n را با $P\{X=n\}=P_n$ بگیرد و $Z=g(X,Y)$ باشد، آن گاه

$$E\{Z\}=\sum_n E\{g(x_n,Y)\}p_n \qquad f_z(z)=\sum_n f_z(z \mid x_n)p_n$$