فصل (۱) مروری بر احتمال و متغیر های تصادفی

۱-۱ نظریه احتمال

نظریه احتمال به بررسی پدیده های تصادفی پرداخته و آنها را که تحت آزمایش های مکرر به نتایج متفاوتی منجر می شوند مورد مطالعه قرار می دهد .

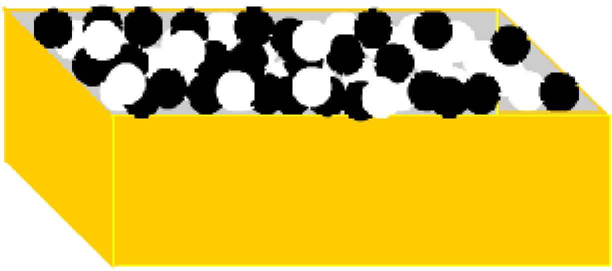
هنگامی که آزمایشی تحت شرایط قابل تکرار صورت می پذیرد، پیشامد های ابتدایی معینی مانند ξ_i به طرق متفاوت ولی کاملاً نامطمئن رخ می دهد . می توان عدد غیر منفی $P(\xi_i)$ را به روش های مختلف به عنوان احتمال پیشامد ξ_i تلقی و تعریف کرد .

تعریف کلاسیک لاپلاس

احتمال پیشامد A بدون انجام آزمایش‌های واقعی عبارت است از:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد نتایج متعلق به } A}{\text{تعداد کل نتایج ممکن}} \qquad (۱-۱)$$

مشروط به آنکه تمام این نتایج متساوی الاحتمال باشند .



n	توپ سفید
m	توپ سیاه

در این حالت دو نتیجه ابتدائی توپ سفید یا توپ سیاه وجود خواهد داشت .

احتمال انتخاب توپ سفید برابر $n / (n + m)$ می باشد .

می توان تعریف کلاسیک فوق را برای تعیین احتمال اینکه یک عدد مفروض قابل قسمت به عدد اول p باشد به کار برد . فرض کنید p عدد اول است ، در این صورت هر عدد p ام (شروع از p) به p قابل قسمت خواهد بود .

بنابراین بین p عدد صحیح متوالی یک نتیجه قابل قبول وجود دارد و می توان گفت :

$$P \left\{ \text{عدد مفروض به عدد اول } p \text{ قابل قسمت است} \right\} = 1 / p$$

(۱-۲)

تعریف فرکانس نسبی

احتمال پیشآمدی مانند A به صورت زیر تعریف می شود :

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} n_A / n \quad (۱-۳)$$

n_A ← تعداد رخدادهای A

n ← تعداد کل آزمایش ها

می توان تعریف فرکانس نسبی را بکار برد و رابطه (۲-۱) را نیز نتیجه گرفت .

(۱-۲)

P{ عدد مفروض به عدد اول p قابل قسمت است } = ۱/p

بدین منظور باید گفت بین اعداد صحیح n ،...، ۳ ،۲ ،۱ اعداد

...... ،p ،۲p ،۳p به p قابل قسمت هستند .

بنابراین تعداد چنین اعدادی بین ۱ و n برابر n / p خواهد بود.

پس

P { عدد مفروض N به عدد اول p قابل قسمت است }

$$= \lim_{n \to \infty} (n/p) / n = 1/p \quad (۱-۴)$$

به روش مشابه می توان نشان داد :

P { عدد مفروض N به p^2 قابل قسمت است } = ۱ / p^2 (۱-۵)

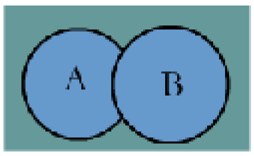
P { عدد مفروض N به pq قابل قسمت است } = ۱ / pq (۱-۶)

رهیافت کلی و اصولی کولموگروف Kolmogorov در رابطه با احتمال که شامل مجموعه ای از قوانین می باشد ، معمولاً به تعاریف (۱-۱) و (۳-۱) ترجیح داده می شود چون زیر بنای مستحکمی برای کاربرد های پیچیده فراهم می سازد .

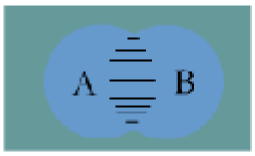
مجموع کلیه ξ_i ها یعنی مجموعه تمام نتایج آزمایش ها را مجموعه Ω می‌نامیم.

$$\Omega = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots\ldots , \xi_k , \ldots\ldots \} \qquad (۱-۷)$$

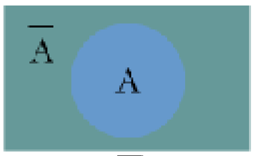
بدیهی است که Ω دارای زیر مجموعه های $A , B , C , \ldots\ldots$ است . به یاد آورید که اگر A زیر مجموعه Ω باشد ، در این صورت $\xi \in A$ دلالت دارد بر اینکه $\xi \in \Omega$ است . با استفاده از A, B می توان زیر مجموعه های مرتبط دیگر مانند $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ و غیره را به وجود آورد .



$A \cup B$



$A \cap B$



$\overline{A}$

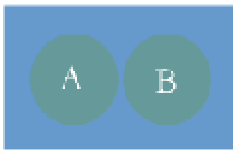
$$A \cup B = \{ \xi \mid \xi \in A \text{ یا } \xi \in B \}$$
$$A \cap B = \{ \xi \mid \xi \in A \text{ و } \xi \in B \} \qquad (۱-۸)$$
$$\overline{A} = \{ \xi \mid \xi \notin A \}$$

اگر $A \cap B = \Phi$ یعنی اشتراک A و B یک مجموعه تهی باشد، در این صورت A و B را دو مجموعه ناسازگار یا جدا از هم می نامند .

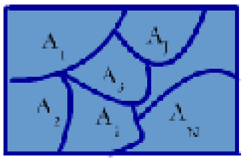
Mutually exclusive (m.e.)

جزء بندی (Partition) Ω مجموعی از زیر مجموعه های ناسازگار است به طوری که اجتماع آنها Ω باشد . به عبارت دیگر :

$$A_i \cap A_j = \Phi \qquad \bigcup_{i=1} A_i = \Omega \qquad (۱-۹)$$



شکل (۱-۲)



فرض کنید A ، B ، C زیر مجموعه های دلخواه Ω می باشند . نتایج زیر را می‌توان با به کار بردن تعریف ها و بررسی اینکه هر یک زیر مجموعه دیگری است ، اثبات کرد .

باید توجه شود که ترتیب تقدم عملیات :

(۱) پارانتزها (۲) مکمل (۳) اشتراک و (۴) اجتماع است .

قوانین جابه جا پذیری:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

قوانین شرکت پذیری :

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

قوانین توزیع پذیری :

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

قوانین دمورگان:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (۱-۱۰)$$
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

میدان :

مجموعی از زیر مجموعه های غیر تهی مجموعه Ω هنگامی تشکیل یک میدان(Field) را می دهند که اگر :

i) Ω **عضوی از** F باشد . $\Omega \in F$

ii) **اگر** $A \in F$ **باشد در این صورت** $\overline{A} \in F$ **گردد.** (۱-۱۱)

iii) **اگر** $A \in F$ **و** $B \in F$ **باشد در این صورت** $A \cup B \in F$ **باشد .**

با استناد به سه شرط فوق ، به آسانی می توان نشان داد که $\overline{A} \cap B$ و $A \cap B$
و غیره نیز به F تعلق دارند .

برای مثال با توجه به شرط (ii) می‌توان نتیجه گرفت که $\overline{A} \in F \; , \; B \in F$
و با استفاده از شرط (iii) $\overline{A} \cup B \in F$ نتیجه می شود که با استناد مجدد
به شرط (ii) ، می توان ادعا کرد که $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B \in F$
می باشد که در رسیدن به نتیجه مذکور از قوانین دمورگان استفاده شده است

بنابراین اگر $B \in F$ و $A \in F$ باشد ، در این صورت میدان F عبارت است از:

$$F = \{ \Omega , A , B , \overline{A} , B , A \cup B , A \cap B , A \cup B , \ldots \} \qquad (1-12)$$

از این مرحله به بعد ، واژه "پیشآمد" (Event) را فقط برای اعضای میدان F
به کار می بریم . با فرض اینکه احتمال $p_i = P (\xi_i)$ نتایج ابتدایی
ξ_i متعلق به Ω از قبل تعریف شده باشد ، چگونه می توان احتمالاتی را به پیشآمد های
پیچیده تر مانند A , B , AB , ... فوق الذکر اختصاص داد . سه قاعده کلی
احتمال که در درس بعد تعریف می شوند به سوال مذکور جواب می دهند

قواعد کلی احتمال

به هر پیشآمد مانند A ، عدد $P(A)$ را که احتمال پیشامد A نامیده می شود،
اختصاص می دهیم .

این عدد سه شرط زیر که قواعد کلی احتمال را بیان می کنند ارضاء می نماید ؛

i) $P(A) \geq 0$ (احتمال یک عدد غیر منفی است) (1-13)
ii) $P(\Omega) = 1$ (احتمال کل مجموعه برابر واحد است)
iii) اگر $A \cap B = \Phi$ باشد دراین صورت $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$ خواهد بود .

iii) اگر $A \cap B = \Phi$ باشد دراین صورت $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$ خواهد بود .

قاعده(iii)فوق نشان می دهد که اگر A , B پیشآمدهای ناسازگار (M.E) باشند ،
احتمال اجتماع آنها برابر مجموع احتمالات آنها خواهد شد .

نتایج زیر را می توان با استفاده از قواعد سه گانه یاد شده در بالا به دست آورد .

ii) $P(\Omega) = 1$ (احتمال کل مجموعه برابر واحد است)

الف) چون $A \cup \bar{A} = \Omega$ است ، با استفاده از قاعده (ii) :

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \qquad (1-14)$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ب) مشابهاً برای هر پیشآمد A $\quad A \cap \{\Phi\} = \{\Phi\}$

و در نتیجه می توان گفت : $\quad P(A \cup \{\Phi\}) = P(A) + P(\Phi)$

ولی $A \cup \{\Phi\} = A$ است پس $P\{\Phi\} = 0$ خواهد بود .

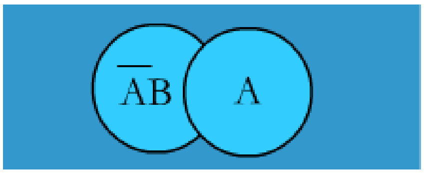
ج) فرض کنید که A , B دو پیشآمد ناسازگار نیستند . چگونه می توان ، $P(A \cup B)$ را محاسبه کرد؟

به منظور محاسبه احتمال فوق ، بایستی $A \cup B$ را برحسب مجموعه های ناسازگار بیان کرد تا بتوان از قواعد کلی احتمال بهره جست .

iii) (اگر $A \cap B = \Phi$ باشد دراین صورت $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$ خواهد بود)

با توجه به شکل (۴-۱) می توان نتیجه گرفت که :

$A \cup B$



شکل (۴-۱)

$$A \cup B = A \cup \bar{A}B \qquad (1-15)$$

به طوریکه A , $\bar{A}B$ دو پیشآمد ناسازگار هستند. با استناد به قاعده (iii - ۱۳-۱)

$$P(A \cup B) = P(A \cup \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) \qquad (1-16)$$

به منظور محاسبه $P(\bar{A}B)$ می توان B را به صورت زیر بیان کرد :

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = BA \cup B\bar{A}$$
$$P(B) = P(BA) + P(B\bar{A}) \qquad (1-17)$$

$$A \cup B = A \cup \overline{A}B \quad (1-15)$$

$$P(B) = P(BA) + P(B\overline{A}) \quad (1-17)$$

چون $B\overline{A} = \overline{A}B$, $BA = AB$ پیشآمدهای ناسازگار هستند.

با توجه به رابطه (۱۷-۱)،

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$$

و از ترکیب رابطه فوق با رابطه (۱۵-۱) می توان نتیجه گرفت :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1-18)$$

میدان σ

میدانی مانند F را هنگامی میدان σ ، (σ - Field) می‌نامیم که علاوه بر سه شرط مندرج در رابطه (۱۱-۱) خاصیت زیر را نیز دارا باشد:

برای هر دنباله ای مانند $A_i , i = 1 \rightarrow \infty$ که متشکل از پیشآمد های دو به دو ناسازگار بوده و متعلق به F می باشند، اجتماع آنها نیز به F تعلق داشته باشد یعنی :

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F \quad (1-19)$$

با توجه به رابطه (۱۹-۱) می توان قاعده دیگری به مجموعه قواعد کلی احتمال مندرج در (۱۳-۱) افزود .

iv) اگر A_i پیشآمد های دوبه دو ناسازگار باشند ، دراین صورت :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad (1-20)$$

در پایان باید گفت که سه کمیت (Ω ، F ، P) یعنی مجموعه غیر تهی پیشآمدهای ابتدایی یا Ω ، میدان σ یا F زیر مجموعه های Ω و معیار احتمال P مربوط به مجموعه ها در F ، هر سه به همراه چهار قواعد (۱۳-۱) و (۲۰-۱) تشکیل یک مدل احتمال را می دهند . احتمال پیشامد های پیچیده تر را باید با استفاده از این چهار چوب توسط استقراء به دست آورد.

احتمال شرطی و استقلال

در N آزمایش مستقل ، فرض کنید N_A , N_B , N_{AB} به ترتیب تعداد دفعات رخداد پیشآمدهای A , B , AB را نشان می دهند .

با استناد به تعبیر فرکانسی احتمال به ازاء N بزرگ می توان گفت :

$$P(A) \approx N_A / N \quad P(B) \approx N_B / N \quad P(AB) \approx N_{AB} / N \qquad (1-21)$$

بین N_A تعداد رخداد A ، فقط N_{AB} از آنها را نیز می توان در بین N_B تعداد رخداد B یافت . بنابراین نسبت :

$$N_{AB} / N_B = \frac{N_{AB} / N}{N_B / N} = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1-22)$$

معیاری برای "پیشآمد A مشروط بر آنکه پیشآمد B قبلاً رخ داده باشد "
خواهد بود . این احتمال شرطی را به صورت زیر مشخص می‌کنیم :

احتمال "پیشآمد A مشروط بر آنکه پیشآمد B رخ داده است" $= P(A/B)$

بنابراین ، بنا به تعریف :

$$P(A/B) = P(AB)/P(B) \qquad (1-23)$$

مشروط بر آنکه $P(B) \neq 0$ باشد . همان گونه که در سطور پائین نشان می دهیم
تعریف فوق تمام قواعد کلی احتمال ذکر شده در قبل را اقناع می‌نماید .

می توان نوشت :

$$\text{i) } P(A/B) = \frac{P(AB) \geq 0}{P(B) > 0} \geq 0 \qquad (1-24)$$

$$\text{ii) } P(\Omega/B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \qquad (1-25)$$

چون $\Omega B = B$ است

فرض کنید که $A \cap C = 0$ است ، در این صورت :

$$\text{iii) } P(A \cup C/B) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB \cup CB)}{P(B)} \qquad (1-26)$$

$$P(A/B) = P(AB)/P(B) \quad (۱-۲۳)$$

ولی $AB \cap AC = \Phi$ است پس $P(AB \cup CB) = P(AB) + P(CB)$

$$P(A \cup C/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} + \frac{P(CB)}{P(B)} = P(A/B) + P(C/B) \quad (۱-۲۷)$$

چنانچه ملاحظه می شود تمام قواعد کلی احتمال مندرج در رابطه (۱۳-۱) توسط تعریف مورد نظر اقناع می‌شود . بنابراین تعریف (۲۳-۱) بیانگر یک معیار احتمال قانونی و منطقی است .

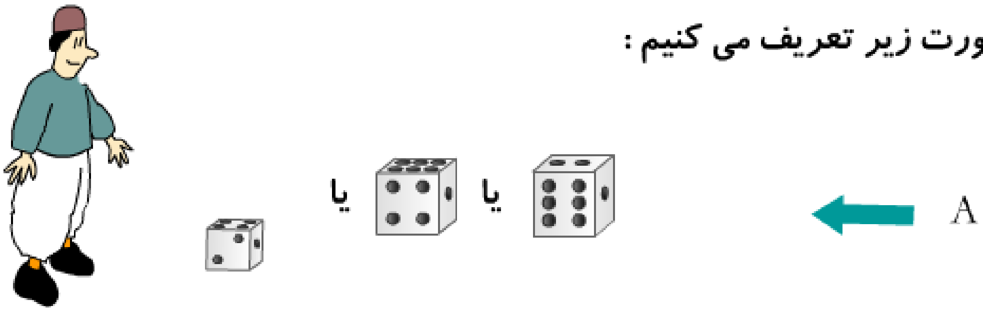
خواص احتمال شرطی

الف) اگر $AB = B \quad , B \subset A$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = ۱ \quad (۱-۲۸)$$

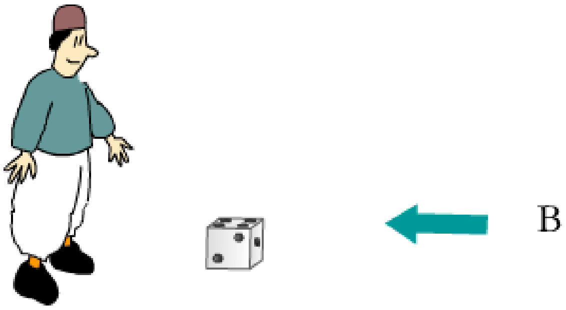
چون اگر $B \subset A$ **باشد در این صورت وقوع** B **به مفهوم وقوع خود به خود پیشآمد** A **خواهد بود .**

به عنوان مثال در یک آزمایش پرتاب تاس دو پیشآمد B , A را به صورت زیر تعریف می کنیم :



چون $B \subset A$

$$P(A/B) = ۱$$



ب) اگر $A \subset B \quad , AB = A$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} > P(A) \qquad (۱-۲۹)$$

ج) احتمال شرطی را می توان به منظور بیان احتمال پیشآمد پیچیده ای بر حسب پیشآمد های مرتبط ساده تر به کار برد .

فرض کنید $A_۱, A_۲ . \ldots, A_n$ پیشآمد های دو به دو ناسازگار بوده و اجتماع آنها Ω است. بنابراین $A_i . A_j = \Phi$

$$\bigcup_{j=۱}^{n} A_j = \Omega \qquad (۱-۳۰)$$

$$B = B(A_۱ \cup A_۲ \cup \ldots \cup A_n) = BA_۱ \cup BA_۲ \ldots \cup BA_n \quad (۱-۳۱)$$

$$B = B(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = BA_1 \cup BA_2 \ldots \cup BA_n \quad (1\text{-}31)$$

ولی $A_i \cap A_j = \Phi$ است بنابراین $BA_i \cap BA_j = \Phi$

با توجه به (۱-۳۱) می‌توان نوشت:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B / A_i)\, P(A_i) \qquad (1\text{-}32)$$

با توجه به مفهوم و تعریف احتمال شرطی ، اکنون می توان استقلال پیشآمدها را تعریف و معرفی نمود.

استقلال

دو پیشامد A , B را هنگامی پیشآمدهای مستقل از هم نامند ، که رابطه زیر برقرار باشد:

$$P(AB) = P(A) \,.\, P(B) \qquad (1\text{-}33)$$

باید توجه کرد که تعریف فوق یک بیان مبتنی بر احتمالات است و نه یک مفهوم نظریه مجموعه ها(مانند ناسازگار بودن)

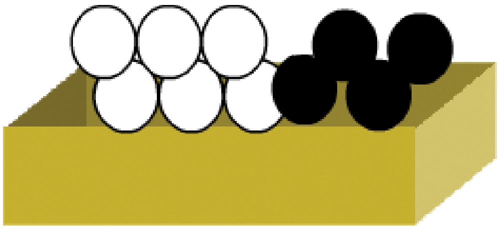
فرض کنید A , B مستقل از هم هستند ، در این صورت :

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \qquad (1\text{-}34)$$

بنابراین اگر A , B مستقل از هم باشند ، وقوع پیشآمد B تاثیری بر پیشآمد A نخواهد داشت . به عبارت دیگر وقوع پیشآمد B یا عدم وقوع B اثری بر A ندارد . مثال زیر مفهوم مذکور را به روشنی نشان می دهد .

مثال ۱-۱

جعبه ای حاوی ۶ توپ سفید و ۴ توپ سیاه است .



دو توپ را به طور تصادفی و بدون جایگزین کردن از جعبه بردارید. احتمال اینکه توپ اول سفیدو توپ دوم سیاه باشد، چیست ؟

فرض کنید:

W_1 = " توپ اول خارج شده سفید است "

B_2 = " توپ دوم خارج شده سیاه است "

ما باید احتمال $P(W_1 \cap B_2)$ را محاسبه کنیم . می دانیم که

$$W_1 \cap B_2 = W_1 B_2 = B_2 W_1$$

با استفاده از قاعده احتمال شرطی می توان گفت :

$$P(W_1 B_2) = P(B_2 W_1) = P(B_2 / W_1) P(W_1) \qquad (۱-۳۵)$$

ولی

$$P(W_1) = \frac{۶}{۶+۴} = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵}$$

$$P(B_2 / W_1) = \frac{۴}{۵+۴} = \frac{۴}{۹}$$

بنابراین

$$P(W_1 B_2) = \frac{۵}{۹} \times \frac{۴}{۹} = \frac{۲۰}{۸۱} \simeq ۰/۲۵$$

آیا پیشآمد های W_1 و B_2 مستقل هستند ؟

منطق ساده به این سوال جواب منفی می دهد. برای تایید این امر به محاسبه $P(B_2)$ نیاز داریم .البته سرنوشت توپ دوم تا حد بسیار زیادی به سرنوشت توپ اول بستگی دارد . توپ اول دارای دو گزینه است :

B_1 = " توپ اول سیاه است " $\qquad$ W_1 = " توپ اول سفید است "

باید توجه کرد که $W_1 \cap B_1 = \Phi$ و $W_1 \cup B_1 = \Omega$

می باشد .بنا براین W_1 با B_1 جزء بندی را تشکیل می دهند .

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_j = \Omega \qquad (1-30)$$

$$B = B(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = BA_1 \cup BA_2 \ldots \cup BA_n \qquad (1-31)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = P(B/A_i)\,P(A_i) \qquad (1-32)$$

$$P(B_2) = P(B_2/W_1)\,P(W_1) + P(B_2/B_1)\,P(B_1)$$

$$= \frac{4}{5+4} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6+3} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(B_2)\,P(W_1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \neq P(B_2W_1) = \frac{20}{81}$$

همان گونه که انتظار می‌رفت پیشآمد های W_1 و B_2 مستقل نیستند .

با استناد به رابطه (۲۳-۱) می‌توان نوشت :

$$P(AB) = P(A/B)\,.\,P(B)$$

مشابهاً با استناد به (۲۳-۱) می‌توان گفت :

$$P(B/A) = P(BA)\,/\,P(A) = P(AB)\,/\,P(A)$$

$$P(AB) = P(B/A)\,.\,P(A)$$

از ادغام روابط فوق ، رابطه زیر حاصل می شود :

$$P(A/B)\,.\,P(B) = P(B/A)\,.\,P(A)$$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)}{P(B)}\,P(A) \qquad (1-36)$$

رابطه(۳۶-۱) به قضیه بیز(Bayes'Theorem) معروف است . اگر چه قضیه بیز به اندازه کافی ساده است ولی تعبیر جالبی برای آن می‌توان ارائه داد .

$P(A)$ احتمال پیشین پیشآمد A را بیان می کند

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)}{P(B)} P(A) \qquad (۱-۳۶)$$

فرض کنید B رخ داده است و A , B مستقل نیستند . چگونه می توان با استفاده از این اطلاعات جدید شناخت و اطلاع خود را درباره A به روز و به هنگام نمائیم.
قاعده بیز در رابطه (۳۶-۱) اطلاعات جدید (B رخ داده است) را در نظر گرفته و احتمال پسین A مشروط به B را به دست می دهد . هم چنین می توان پیشآمد B را به عنوان شناخت جدید حاصل از یک آزمایش تازه تلقی کرد .

شناخت ما از پیشآمد A به صورت $P(A)$
است . اطلاعات جدید در دسترس بر حسب B می باشد.
اطلاعات جدید را بایستی برای بهبود شناخت و اطلاع از پیشآمد A به کار برد .
قضیه بیز مکانیسم دقیقی برای استفاده از این اطلاعات جدید را نشان می دهد .
نسخه عام تری از قضیه بیز شامل جزء بندی Ω می باشد

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)}{P(B)} P(A) \qquad (۱-۳۶)$$

با استفاده از رابطه (۳۶-۱)

(۱-۳۷)

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\,.\,P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\,.\,P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,.\,P(A_i)}$$

که در آن رابطه (۳۲-۱) به کار رفته است . در رابطه (۳۷-۱) $A_i, i=1 \rightarrow n$ نماینده مجموعه ای از پیشآمد های ناسازگار با احتمالات پیشین $P(A_i)\ , i=1 \rightarrow n$ می باشد. با اطلاعات جدید " B رخ داده است " اطلاعات مربوط به A_i را می توان توسط n احتمالات شرطی $P(B/A_i)\ , i=1 \rightarrow n$ به روز کرد .

مثال ۲-۱

$B_1 =$ ۱۰۰ عدد

$B_2 =$ ۲۰۰ عدد

فرض کنید جعبه ای را به طور تصادفی انتخاب کرده و یک لامپ را از آن برداریم .

الف) احتمال اینکه لامپ مذکور معیوب باشد چقدر است ؟

توجه کنید که جعبه B_1 دارای ۸۵ لامپ سالم و ۱۵ لامپ معیوب است.

مشابهاً جعبه B_2 دارای ۱۹۵ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب است.

اگر " لامپ معیوب خارج شده است " $= D$

$$P(D/B_1) = 15/100 = 0/15 \qquad P(D/B_2) = 5/200 = 0/025$$

چون یک جعبه به طور تصادفی انتخاب شده است پس آنها متساوی الاحتمال هستند

$$P(B_1) = P(B_2) = 1/2$$

پس B_1 و B_2 یک جزء بندی را تشکیل داده و می‌توان نوشت :

$$P(D) = P(D/B_1) \,.\, P(B_1) + P(D/B_2) \,.\, P(B_2) =$$
$$(0/15 \times (1/2)) + (0/025 \times (1/2)) = 0/0875$$

بنابراین حدود ۹٪ احتمال دارد که لامپ برداشته شده معیوب باشد .

ب) فرض کنید که لامپ را آزمایش کرده و متوجه می شویم که معیوب است .
احتمال اینکه این لامپ را از جعبه اول برداشته باشیم چقدر است ؟

به عبارت دیگر باید احتمال شرطی $P(B_1/D)$ **را حساب کنیم.**

$$P(B_1/D) = (P(D/B_1) \,.\, P(B_1)) \,/\, P(D) =$$
$$(۰/۱۵ \times (۱/۲)) \,/\, (۰/۰۸۷۵) = ۰/۸۵۷۱$$

توجه کنید که $P(B_1) = ۰/۵$ **بوده و ما به طور تصادفی جعبه ای را انتخاب و لامپی را از آن برداشته و آزمایش کرده و معیوب بودن آن را نتیجه گرفته ایم.**
آیا این اطلاعات می‌تواند تا حدی این واقعیت را نشان دهد که ما جعبه اول را انتخاب کرده ایم ؟ با توجه به نتیجه به دست آمده

$$P(B_1/D) = ۰/۸۵۷ > ۰/۵$$

احتمال بیشتری می رود که ما جعبه اول را انتخاب کرده باشیم .
ضمناً به یاد آورید که جعبه اول در مقایسه با جعبه دوم شش برابر لامپ معیوب دارد .

همانطور که قبلاً گفته شد پیشآمد های A , B **هنگامی مستقل از یکدیگر هستند که**

$$P(AB) = P(A) \,.\, P(B)$$

به آسانی می‌توان نشان داد که استقلال A , B **بدین مفهوم است که**
$\overline{A}$, B ، A , $\overline{B}$ ، $\overline{A}$, $\overline{B}$ **همگی زوج های مستقل می باشند .**
یعنی در هر زوج دو عضو آن مستقل آماری از یکدیگر می باشند . برای مثال :

$$B = (A \cup \overline{A})B = AB \cup \overline{A}B \quad , \quad AB \cap \overline{A}B = \Phi$$
$$P(B) = P(AB \cup \overline{A}B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = P(A) \,.\, P(B) + P(\overline{A}B)$$
$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(A) \,.\, P(B) = (1 - P(A)) \,.\, P(B) = P(\overline{A}) \,.\, P(B)$$

پس $\overline{A}$, B **دو پیشآمد مستقل از هم می باشند .**

اگر $P(A) = ۰$ **باشد چون همیشه** $AB \subset A$ **است می توان نتیجه گرفت که :**

$$P(AB) \leq P(A) = ۰ \Longrightarrow P(AB) = ۰$$

بنابراین می‌توان گفت که پیشآمدی با احتمال صفر مستقل از هر پیشامد دیگر است .

بدیهی است پیشآمدهای مستقل نمی‌توانند ناسازگار باشند چون

و استقلال A , B **به مفهوم** $P(AB) > 0$ ، $P(A) > 0 , P(B) > 0$

بنابراین اگر A , B **مستقل باشند پیشآمد** AB **نمی‌تواند یک مجموعه نول باشد .**

به طور کلی مجموعه ای از پیشآمد ها مانند $\{A_i\}$ **هنگامی مستقل از یکدیگر هستند**

که به ازای هر زیر مجموعه محدودی مانند $A_{i1} , A_{i2} , \ldots\ldots , A_{in}$ **داشته باشیم.**

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{ik}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{ik}) \qquad (1-38)$$

فرض کنید اجتماعی از n **پیشآمد مستقل در دست است .**

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_n \qquad (1-39)$$

با استفاده از قانون دمورگان می توان نوشت : $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots\ldots \overline{A_n}$

و با توجه به استقلال آنها :

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots\ldots \overline{A_n}) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_n \qquad (1-39)$$

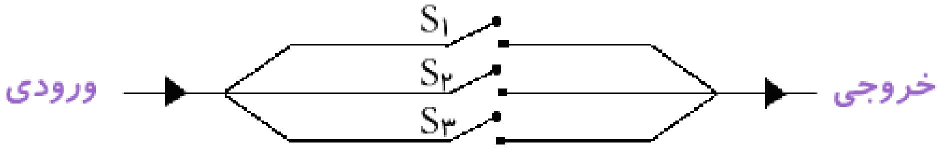
بنابراین به ازاء هر A **در رابطه (۳۹-۱) می‌توان گفت :**

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)) \qquad (1-40)$$

که رابطه فوق نتیجه مفیدی می‌باشد .

مثال ۳-۱

سه کلید که به طور موازی متصل شده اند مستقل از یکدیگرعمل می کنند . احتمال بسته بودن هر کلید برابر p است.



شکل (۵ - ۱)

الف) احتمال دریافت سیگنال ورودی در خروجی را به دست آورید .
ب) احتمال باز بودن کلید S_1 مشروط بر آنکه سیگنال ورودی در خروجی دریافت شود چقدر است؟

الف)فرض کنید "A_i= کلید S_1 بسته است". دراین صورت $P(A_i) = p$ و $i = 1,2,3$
چون کلیدهامستقل از یکدیگر عمل می کنند

$$P(A_iA_j) = P(A_i) . P(A_j) \text{ و } P(A_1A_2A_3) = P(A_1) . P(A_2) . P(A_3)$$

هم چنین فرض کنید " R = سیگنال ورودی در خروجی دریافت شود " . به منظور وقوع پیشآمد R کافی است که یکی از سه کلید ۱ یا ۲ یا ۳ بسته باقی بماند.
به عبارت دیگر :

$$R = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)) \qquad (1\text{-}40)$$

$$P(R) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - (1-p)^3 = 3p - 3p^2 + p^3$$

با روش دیگری به نتیجه فوق نیز می‌توان رسید . از آنجا که هر پیشآمد و مکمل آن تشکیل یک جزء بندی بدیهی را می دهند می توان گفت :

$$P(R) = P(R/A_1).P(A_1) + P(R/\overline{A_1}).P(\overline{A_1})$$

ولی $P(R/A_1) = 1$ $\qquad$ $P(R/\overline{A_1}) = P(A_2 \cup A_3) = 2p - p^2$

$$P(R) = p + (2p - p^2)(1 - p) = 3p - 3p^2 + p^3$$

که همان نتیجه قبلی است .

توجه کنید که پیشآمدهای A_1, A_2, A_3 یک جزءبندی را تشکیل نمی‌دهند ، چون آنها ناسازگار نیستند .بدیهی است هر دو یا سه کلید را می توان همزمان بسته یا باز کرد .

علاوه بر آن $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \neq 1$

ب) با استفاده از قضیه بیز می توان نوشت :

$$P(\overline{A_1}/R) = \frac{P(R/\overline{A_1})\,P(\overline{A_1})}{P(R)} = \frac{(2p - p^2)(1 - p)}{3p - 3p^2 + p^3} = \frac{2 - 2p + p^2}{3p - 3p^2 + p^3}$$

با توجه به تقارن کلیدها می توان نتیجه گرفت که :

$$P(\overline{A_1}/R) = P(\overline{A_2}/R) = P(\overline{A_3}/R)$$

آزمایش های تکراری

دو آزمایش مستقل با مدل های احتمال (Ω_2, F_2, P_2) و (Ω_1, F_1, P_1) را در نظر بگیرید . فرض کنید که $\xi \in \Omega_1 \quad , \quad \eta \in \Omega_2$ پیشآمد های ابتدایی را توصیف می کنند .

عملکرد توأم این دو آزمایش پیشآمدهای ابتدایی $\omega = (\xi, \eta)$ را به وجود می آورد . چگونه می توان احتمال مرتبط با این " پیشآمد مرکب " را مشخص کرد ؟

فضای حاصلضربی کارتزین $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ حاصل از Ω_1 ، Ω_2 را در نظر بگیرید

که در آن اگر $\xi \in \Omega_1 \; , \; \eta \in \Omega_2$ باشد در آن صورت هر ω

در Ω یک زوج مرتب به شکل $\omega = (\xi , \eta)$ خواهد بود .

برای رسیدن به مدل احتمال ضروری است ترکیب سه تایی(Ω , F , P)تعریف شود .

فرض کنید $A \in F_1 \; , \; B \in F_2$ باشد. در این صورت

$A \times B$ مجموعه ای از تمام زوجهای (ξ, η) است. به طوریکه $\xi \in A, \ \eta \in B$
هر چنین زیر مجموعه ای از Ω یک پیشآمد منطقی برای آزمایش مرکب خواهد بود .
فرض کنید F بیانگر میدان مرکب از تمام چنین زیر مجموعه های $A \times B$
به همراه اجتماع و مکمل های آنها باشد .

در این آزمایش مرکب ، احتمال پیشآمدهای $A \times \Omega_2 , \Omega_1 \times B$

به نحوی است که $P(A \times \Omega_2) = P_1(A) , P(\Omega \times B) = P_2(B)$

علاوه بر این پیشآمد های $A \times \Omega_2 , \Omega_1 \times B$ به ازاء هر $A \in F_1 , \ B \in F_2$
پیشآمد های مستقل هستند . چون

$$(A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B) = A \times B$$

پس می توان نتیجه گرفت که به ازاء جمیع $A \in F_1 \ , \ B \in F_2$
رابطه زیر برقرار است :

$$P(A \times B) = P(A \times \Omega_2)P(\Omega_1 \times B) = P_1(A)\, P_2(B)$$

رابطه فوق معیار احتمال منحصر به فردی یعنی $P = P_1 \times P_2$
را در مجموعه های موجود در F نشان داده
و ترکیب سه تایی (Ω, F, P) را تعریف می کند .
مفهوم فوق را می توان تعمیم داد .

n آزمایش $\Omega_1, \Omega_2, \ldots\ldots, \Omega_n, \ P_i, F_i \ (i = 1 \rightarrow n)$
مربوط به آنها را در نظر بگیرید . فرض کنید

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots\ldots \times \Omega_n$$

بیانگر حاصلضرب کارتزین آنها با پیشآمدهای‌ابتدایی n بعدی

$$\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n \ , \ \xi_i \in \Omega_i$$

باشد.پیشآمدهای این فضای مرکب به شکل

$$A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n$$

است به طوریکه $A_i \in F_i$ می باشد . اگر تمام این n آزمایش مستقل باشند و
$P_i(A_i)$ احتمال پیشآمد A_i در F_i باشد مانند مورد قبل می توان نتیجه گرفت که :

$$P(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots\ldots \times A_n) = P_1(A_1)P_2(A_2) \ldots\ldots P_n(A_n) \qquad (1-41)$$

مثال ۴-۱

در یک آزمایش تنها پیشآمد A با احتمال p رخ می دهد . احتمال وقوع A به تعداد دقیق k $(k \leq n)$ در n آزمایش را تعیین کنید .

فرض کنید که (Ω, F, P) مدل احتمال یک آزمایش تنها باشد.

نتیجه n آزمایش یک عضو n بعدی زیر است :

$$\omega = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in \Omega_0$$

که در آن هر $\xi_i \in \Omega$ بوده و $\Omega_0 = \Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega$ می باشد .

اگر $\xi_i \in A$ باشد پیشآمد A در آزمایش i ام رخ می دهد .

فرض کنید که A دقیقاً k بار در ω رخ می دهد .

در این صورت k عدد از ξ_i ها به A تعلق دارد $\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ik}\}$

و باقیمانده $n-k$ در مکمل آن $\overline{A}$ قرار دارند .

با استفاده از :

$$P(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n) = P_1(A_1)P_2(A_2) \ldots P_n(A_n) \quad (1-41)$$

احتمال وقوع چنین ω عبارت است از :

$$P_0(\omega) = P(\{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ik}, \ldots, \xi_{in}\})$$
$$= P(\{\xi_{i1}\})P(\{\xi_{i2}\}) \ldots P(\{\xi_{ik}\}) \ldots P(\{\xi_{in}\})$$

$$= \underbrace{P(A)\,P(A) \ldots P(A)}_{k}\underbrace{P(\overline{A})\,P(\overline{A}) \ldots P(\overline{A})}_{n-k} = p^k q^{n-k} \quad (1-42)$$

به طوریکه $q = 1 - p$ می باشد .

به هر حال k رخداد پیشآمد A می تواند در هر محل به خصوصی از ω قرار گیرد .

فرض کنید $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$

نشان دهنده تمام چنین پیشآمدهایی باشد که در آن A دقیقاً k بار رخ می دهد .

در این صورت $A" = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \ldots \cup \omega_n$ دقیقاً k بار در n آزمایش رخ می دهد"

ولی تمام این ω_i ها ناسازگار و متساوی الاحتمال هستند پس :

$$P(\text{"}A \text{ دقیقاً } k \text{ بار در } n \text{ آزمایش رخ می دهد"}) = \sum_{i=1}^{N} P_\circ(\omega_i)$$

$$= N P_\circ(\omega) = N p^k q^{n-k}$$

به خاطر آورید ، در ابتدا n گزینه ممکن داریم یعنی مورد اول به n طریق مختلف تعیین می شود و برای هر چنین انتخابی گزینه دوم $(n-1)$ حالت داشته ..... و گزینه k ام دارای $(n-k+1)$ حالت می باشد ولی این امر شامل $k!$ گزینه بین k مورد غیر قابل تمایز (یعنی موارد یکسان) می‌باشد .

در نتیجه :

$$N = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \triangleq \binom{n}{k} \qquad (۱-۴۳)$$

رابطه فوق تعداد ترکیبات یا گزینه های k مورد در هر بار از n موارد یکسان را بیان می‌کند بنا بر این

$$P_n(k) = P(\text{"}A \text{ دقیقاً } k \text{ بار در } n \text{ آزمایش رخ می دهد"}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = ۰, ۱, \ldots, n \qquad (۱-۴۴)$$

رابطه فوق منتسب به برنولی می باشد .آزمایش های تکراری مستقل از این نوع، که در آن نتیجه " قبول" (A) یا " مردود" $(\bar{A})$ می باشد به عنوان آزمایش‌های برنولی نامیده شده و احتمال k قبولی در n آزمایش

از رابطه (۱-۴۴) که در آن p احتمال قبولی در هر آزمایش تنها است ، قابل تعیین می باشد . بدیهی است در یک آزمایش برنولی با n آزمایش احتمال اینکه تعداد وقوع پیشآمد A بین k_1, k_2 باشد عبارت است از :

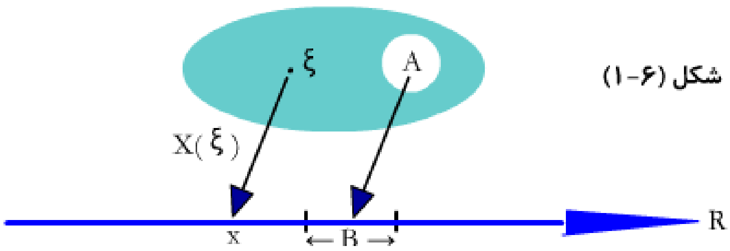
(۱-۴۵)

$$P(\text{" تعداد وقوع } A \text{ بین } k_1, k_2 \text{ باشد "}) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

۱-۲ متغیر های تصادفی

مدل احتمال (Ω, F, P) برای یک آزمایش و نیز X تابعی‌که هر $\xi \in \Omega$ را به نقطه یکتای $x \in R$ ، مجموعه اعداد حقیقی نگاشت می کند ، در نظر بگیرید .

از آنجا که نتیجه ξ حتمی و قطعی نیست بدین علت مقدار $X(\xi)=x$ نیز حتمی نمی باشد . بنابراین اگر B زیر مجموعه ای از R باشد ، احتمال "$X(\xi) \in B$" را چگونه باید تعیین کرد . به منظور محاسبه این احتمال می توان به مجموعه $A=X^{-1}(B) \in \Omega$ که شامل تمام اعضای $\xi \in \Omega$ ، نگاشته شده به B توسط تابع X می باشد ،توجه کرد . همان طور که در شکل ۶-۱ نشان داده شده است



شکل (۶-۱)

اگر مجموعه $A=X^{-1}(B)$ به میدان مربوطه F تعلق داشته باشد در این صورت آن یک پیشآمد بوده واحتمال A به‌خوبی قابل تعریف است. دراین‌حالت می‌توان‌گفت

$$" X(\xi) \in B " \quad \text{احتمال پیشآمد} = P(X^{-1}(B))$$

به هر حال امکان دارد $X^{-1}(B)$ به ازاء تمام Bها همیشه به F تعلق نداشته باشد و سبب ایجاد مشکلاتی گردد . مفهوم متغیر تصادفی اطمینان می‌دهدکه نگاشت معکوس همیشه منجر به پیشآمدی شده و به ما امکان‌تعیین احتمال هر $B \in R$ را می دهد . بنابراین متغیر تصادفی را می توان بدین صورت تعریف کرد :

یک تابع مقدار محدود مانند $X(\circ)$ که مجموعه تمام نتایج حاصل از آزمایش‌ها(Ω) را به مجموعه اعداد حقیقی R نگاشت می‌کند ، متغیر تصادفی نامند مشروط بر آنکه مجموعه$\{\xi / X(\xi) \leq x\}$ پیشآمدی ($\in F$) به ازاء هر x در R باشد . به عبارت دیگرXرا هنگامی متغیر تصادفی گوییم که $X^{-1}(B) \in F$ باشد به طوریکه B بیانگر بازه های نیمه معین به شکل $\{-\infty < x \leq a\}$ بوده و تمام مجموعه های دیگر را با استفاده از این مجموعه ها توسط عملیات مجموعه ای اجتماع ، اشتراک و منفی سازی به هرتعدادی بتوان ایجاد کرد .پس اگرX یک متغیرتصادفی باشد در آن صورت :

$$\{\xi / X(\xi) \leq x\} = \{X \leq x\} \qquad (۱-۴۶)$$

نیز یک پیشآمد به ازاء هر x است . آیا می توان $\{a < X \leq b\}$ و $\{X=a\}$ را نیز پیشامد تلقی کرد؟ در واقع به ازاء $b > a$ چون $\{X \leq a\}$ و$\{X \leq b\}$ پیشامد هستند $\{X \leq a\}^c = \{X > a\}$ پیشامد بوده و در نتیجه:

$\{a < X \leq b\} = \{X > a\} \cap \{X \leq b\}$ نیز یک پیشامد است. بنابراین

$\{a - \frac{1}{n} < X \leq a\}$ یک پیشامد به ازاء هر n است . در نتیجه :

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{a - \frac{1}{n} < X \le a\} = \{X=a\}$ نیز یک پیشآمد است .تمام پیشآمد ها دارای احتمالی هستند که به خوبی تعریف شده اند .پس احتمال پیشآمد

$\{\xi / X(\xi) \le x\}$ باید به x بستگی داشته باشد .

$$P\{\xi / X(\xi) \le x\} = F_X(x) \ge 0 \qquad (1\text{-}47)$$

نقش اندیس X در رابطه فوق فقط مشخص کردن متغیر تصادفی واقعی است .

$F_X(x)$ را تابع توزیع تجمعی (CDF)(Cumulative Distribution Function) متغیر تصادفی X نامند .

خواص تابع توزیع

در این بررسی عبارت $F(x^+)$ و $F(x^-)$ دارای مفهوم حدی هستند

$$F(x^+) = \text{Lim}\, F(x+\varepsilon) \qquad F(x^-) = \text{Lim}\, F(x-\varepsilon)\ ,\ 0 < \varepsilon \to 0$$

تابع توزیع دارای خواص زیر است:

۱) $F(+\infty) = 1\ ,\ F(-\infty) = 0$

۲) تابع CDF تابعی غیر نزولی از x است

اگر $x_1 < x_2$ باشد در این صورت $F(x_1) \le F(x_2)$

۳) اگر $F(x_0) = 0$ باشد در این صورت به ازاء هر $x \le x_0$، $F(x) = 0$ خواهد بود.

۴) $P(X > x) = 1 - F(x)$

۵)تابع توزیع $F(x)$ تابعی است که از سمت راست پیوسته است یعنی:

$$F(x^+) = F(x)$$

۶) $P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1) \qquad (1\text{-}48)$

۷) $\quad$ (۱-۴۹) $\quad P\{X = x\}=F(x)-F(x^-)$

۸) $\quad$ (۱-۵۰) $\quad P\{x_1<X\leq x_2\}=F(x_2)-F(x_1^-)$

متغیر تصادفی X هنگامی از نوع پیوسته است که تابع توزیع آن $F_x(x)$ تابع پیوسته ای باشد . در این حالت $F_x(x^-)=F_x(x)$ به ازاء تمام مقادیر x بوده است . $P\{X=x\}=0$

اگر $F_x(x)$ علاوه بر مقادیر ثابت دارای تعداد محدودی ناپیوستگی های پرشی (ثابت قطعه ای یا نوع پله ای) باشد ، درآن صورت X را متغیر تصادفی نوع گسسته نامند . اگر x_i یک نقطه نا پیوستگی باشد می‌توان گفت :

$$P\{X=x_i\}=F_x(x_i)-F_x(x_i^-)= p_i$$

متغیر تصادفی می تواند به صورت پیوسته و گسسته (مخلوط) نیز تعریف شود که که در آن حالت تابع توزیع آن علاوه بر پیوسته بودن در برخی مقادیر x دارای ناپیوستگی های پرشی خواهد بود .

مثال ۵ – ۱

یک ارتباط تلفنی به طور تصادفی در بازه (۱ و ۰) برقرار می‌شود .

در این آزمایش ، نتایج فواصل زمانی t

بین ۰ و ۱ بوده و احتمال اینکه t بین t_1 و t_2 باشد عبارت است از :

$$P\{t_1\leq t\leq t_2\}= t_2 - t_1$$

متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$X(t)=t \quad , \quad 0\leq t\leq 1$$

بنابراین متغیر t دارای دومفهوم است. آن نتیجه یک آزمایش بوده و مقدار متناظر $X(t)$ متغیر تصادفی X است. می‌توان نشان داد که تابع توزیع $F(X)$ متغیر تصادفی X به صورت شکل ۷-۱ خواهد بود.

اگر $X > 1$ باشد در این صورت $X(t) \leq x$ به ازاء هر نتیجه آزمایش خواهد بود.

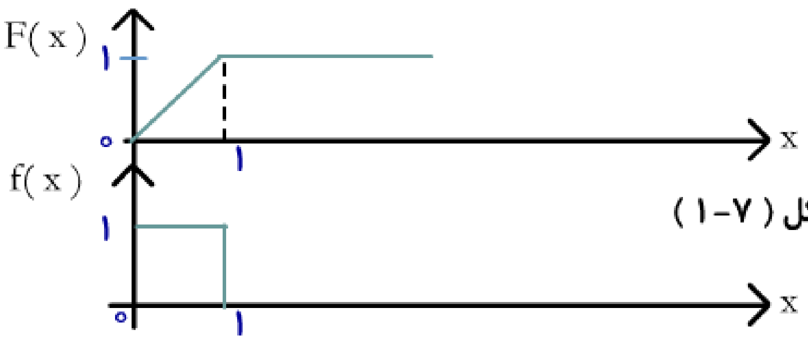
بنابراین: $x > 1 \quad , F(x) = P\{X \leq x\} = P\{0 \leq t \leq 1\} = P(\Omega) = 1$

اگر $0 \leq x \leq 1$ باشد در این صورت $X(t) \leq x$ به ازاء هر t در بازه $(0 \text{ و } x)$ می باشد.

$$0 \leq x \leq 1 \quad , F(x) = P\{X \leq x\} = P\{0 \leq t \leq x\} = x$$

اگر $x < 0$ باشد در این صورت $\{X \leq x\}$ یک پیشآمد غیرممکن است چون به ازاء هر t, $X(t) \geq 0$ است.

بنابراین : $x < 0 \quad F(x) = P\{X \leq x\} = P\{\Phi\} = 0$



شکل (۷-۱)

تابع چگالی احتمال

مشتق تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ را تابع چگالی احتمال (p.d.f)(Probability Donsity Function) $f_X(x)$ متغیر تصادفی X نامند. بنابراین :

$$f_X(x) \triangleq \frac{dF_X(x)}{dx} \qquad (۱-۵۱)$$

با توجه به این که $\frac{dF_X(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_X(x+\Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} \geq 0$ بوده و نظر به ماهیت تک نوا و غیر نزولی $F_X(x)$ می‌توان نتیجه گرفت که به ازاء تمام مقادیر x، $f_X(x) \geq 0$ است.اگر X یک متغیر تصادفی نوع پیوسته باشد $f_X(x)$ یک تابع پیوسته خواهد بود.به هرحال اگر X یک متغیرتصادفی نوع گسسته باشد در آن صورت p.d.f شکل عمومی (شکل۸-۱)

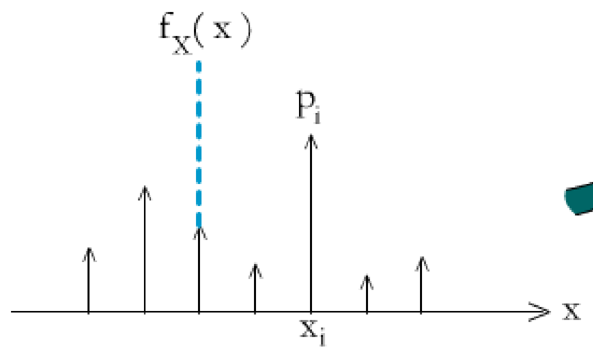
$$f_X(x) = \sum p_i \delta(x - x_i) \qquad (۱-۵۲)$$

را خواهد داشت که در آن x_i بیانگر نقاط نا پیوستگی پرشی در $F_x(x)$ می باشد.
همان طور که شکل ۸-۱ نشان می دهد $f_x(x)$ مجموعه ای از جرم های گسسته مثبت را توصیف کرده و به عنوان تابع جرم احتمال (p.m.f)(Probability Mass Function) در حالت گسسته نامیده می‌شود . با توجه به رابطه (۵۱-۱) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$F_x(x)=\int_{-\infty}^{x} f_x(u)\,du \qquad (۱-۵۳)$$

و چون $F_x(+\infty)=۱$ است پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\,dx=۱ \qquad (۱-۵۴)$$

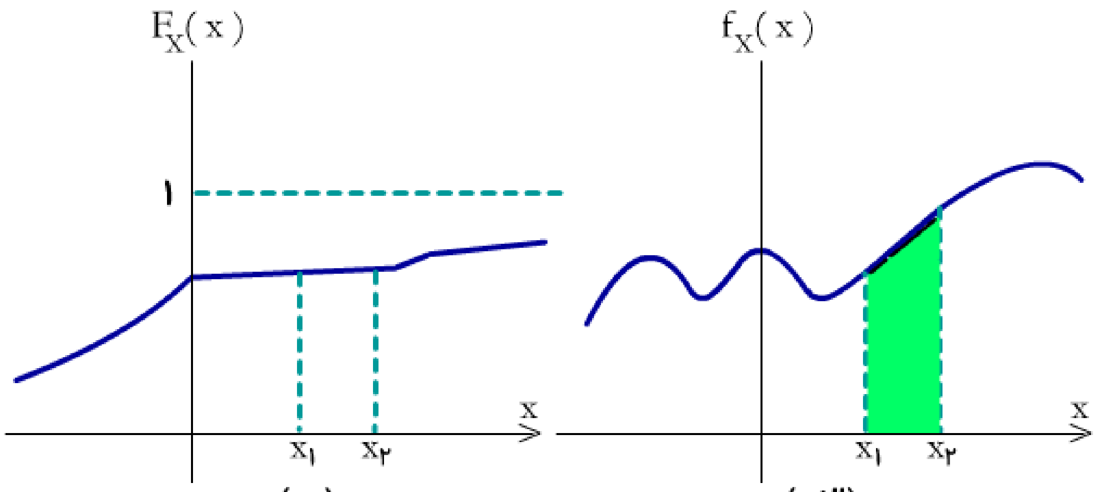


شکل(۸-۱)

هم چنین با استناد به رابطه (۵۳-۱) و شکل ۹-۱ می توان نوشت

$$P\{x_۱< x(\xi)\leq x_۲\}=F_x(x_۲)-F_x(x_۱)=\int_{x_۱}^{x_۲} f_x(x)\,dx \qquad (۱-۵۵)$$

بنابراین سطح زیر منحنی $f_x(x)\,dx$ در بازه $(x_۱ , x_۲)$ احتمال فوق را نشان می دهد.



شکل ۹-۱

اغلب متغیرهای تصادفی را با توابع چگالی احتمال در هردو مورد پیوسته و گسسته توصیف می کنند و در سطور زیرین تعدادی از این توابع متداول برای هر یک از موارد فوق بررسی و معرفی می شوند.

متغیرهای تصادفی نوع پیوسته

۱- نرمال(گوسی): (Gaussian)

Xرا هنگامی متغیر تصادفی نرمال یا گوسی می‌نامیم که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد :

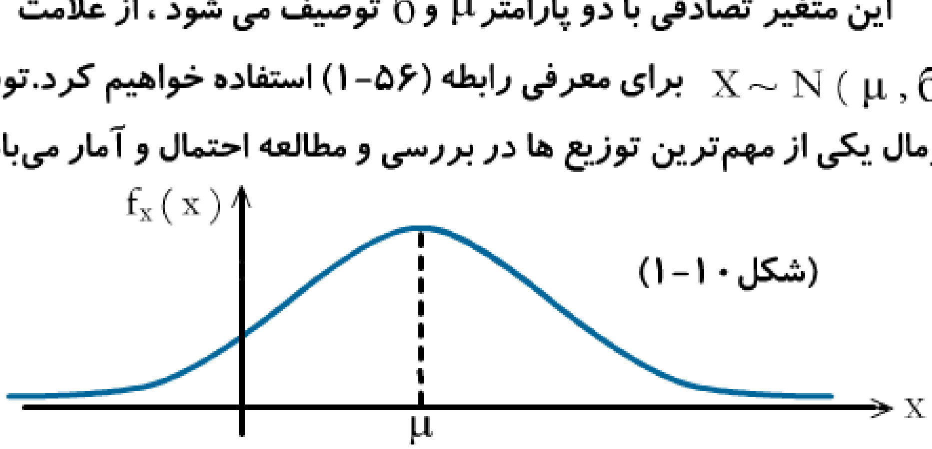
$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (1-56)$$

این تابع به صورت یک منحنی مشابه زنگ و متقارن حول مقدار متوسط متغیر تصادفی (μ) بوده و تابع توزیع آن عبارت است از

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (1-57)$$

به طوری که $G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$

بوده و اغلب به صورت جدول ارائه می‌شود . با توجه به این که این متغیر تصادفی با دو پارامتر μ وσ^2 توصیف می شود ، از علامت $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ برای معرفی رابطه (۵۶-۱) استفاده خواهیم کرد.توزیع نرمال یکی از مهم‌ترین توزیع ها در بررسی و مطالعه احتمال و آمار می‌باشد



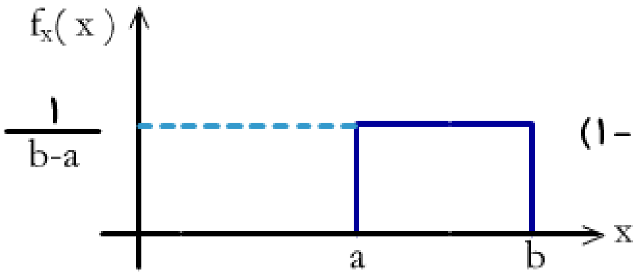
(شکل ۱۰-۱)

۲- یکنواخت : متغیر تصادفی X را هنگامی یکنواخت گوئیم که

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱-۵۸)$$

همان گونه که در شکل ۱۱-۱ نشان داده شده است

برای توصیف این تابع به دو پارامتر نیاز است .



(شکل ۱۱-۱)

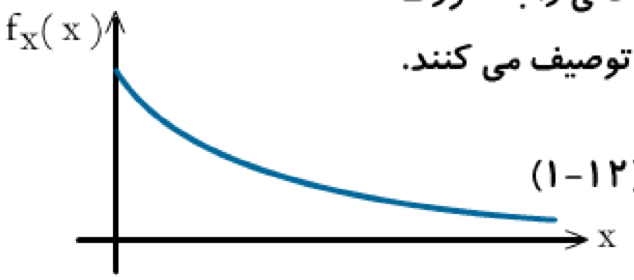
و بدین علت از علامت $a < b$ ، $X \sim U(a, b)$ برای معرفی استفاده می شود.

۳ – نمائی : متغیر تصادفی X را هنگامی نمائی نامیم که

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} & , x \ge 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱-۵۹)$$

و این متغیر تصادفی را به صورت

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ توصیف می کنند.

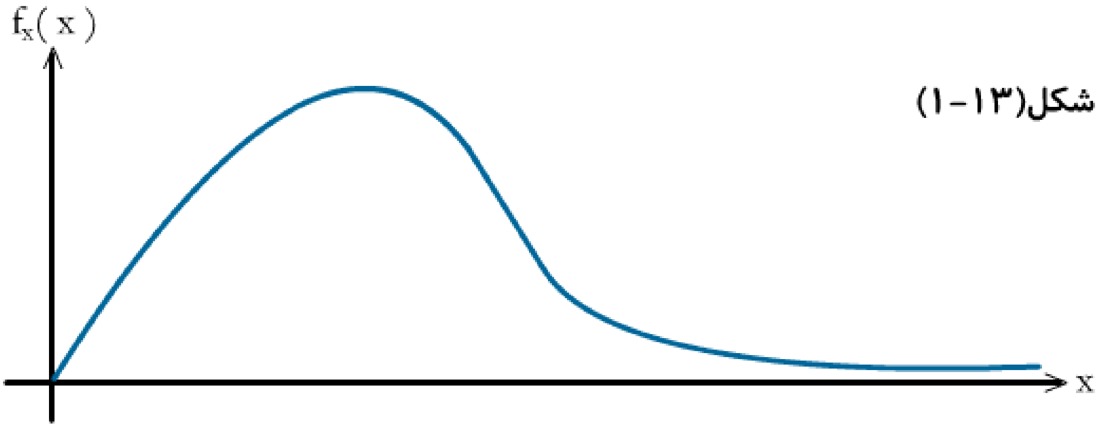


شکل (۱۲-۱)

۴- گاما : متغیر تصادفی گاما را به صورت $X \sim G(\alpha, \beta)$ نشان داده و مطابق

شکل ۱۳-۱ تابع چگالی احتمال آن عبارت است

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}e^{-x/\beta} & ، x\geq ۰\\ ۰ & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad (۱-۶۰)$$



شکل(۱۳-۱)

اگر عدد صحیح $\alpha = n$ باشد در آن صورت $\Gamma(n)=(n-۱)!$ خواهد بود .

۵- بتا :

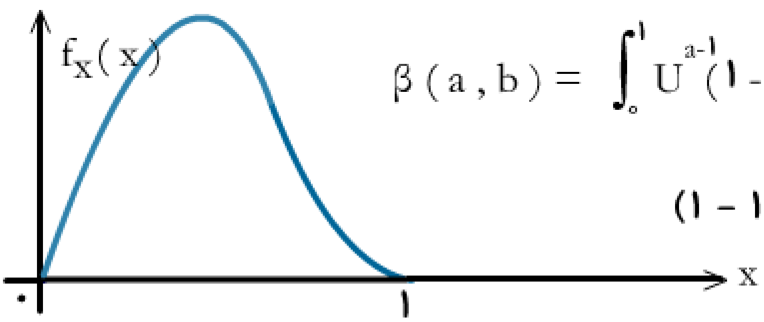
متغیر تصادفی بتا را به صورت $X \sim \beta(a,b)$

توصیف کرده و مطابق شکل ۱۴ - ۱ تابع چگالی احتمال آن عبارت است از :

$$f_x(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{\beta(a,b)}x^{a-۱}(۱-x)^{b-۱} & , ۰<x<۱\\ ۰ & \text{در غیر این صورت}\end{cases} \qquad (۱-۶۱)$$

که در آن تابع بتا $\beta(a,b)$ به صورت زیر تعریف می شود .

$$\beta(a,b)=\int_{۰}^{۱} U^{a-۱}(۱-U)^{b-۱}du \qquad (۱-۶۲)$$

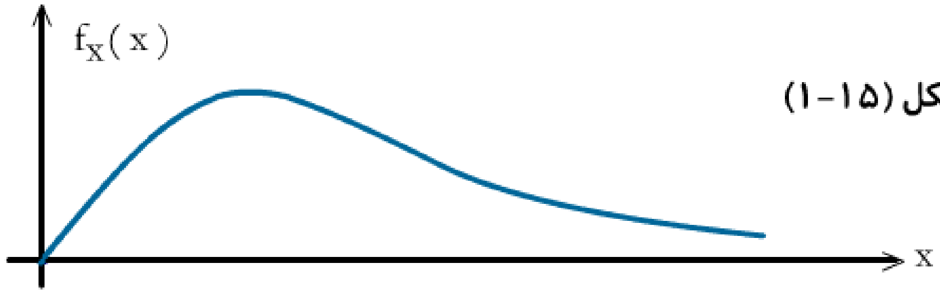


شکل (۱۴ - ۱)

۶ - مربع - کای :

متغیر تصادفی مربع - کای Chi - square را به صورت $X \sim x^2(n)$ تعریف کرده و مطابق شکل ۱۵-۱ تابع چگالی احتمال آن عبارت است از :

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{(n/2)}\,\Gamma(n/2)}\, x^{(n/2)-1}\, e^{-x/2} & , \ x \geq 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{1-63}$$



شکل (۱۵-۱)

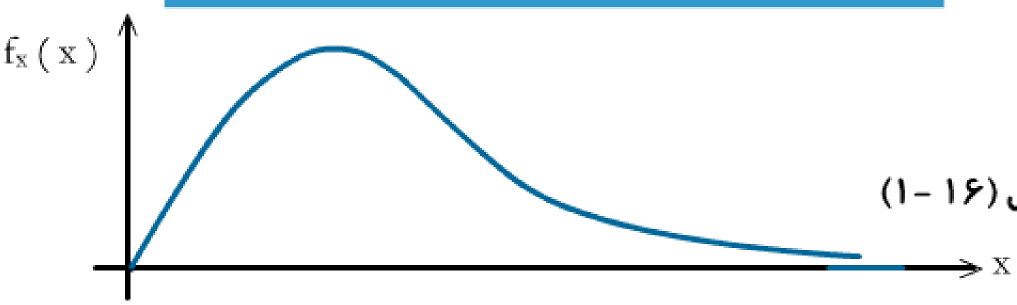
باید توجه کرد که $x^2(n)$ در واقع همان تابع گاما $G(n/2, 2)$

۷ - ری‌لی :

متغیر تصادفی ری‌لی Rayleigh را به صورت $X \sim R(\sigma^2)$

توصیف کرده و تابع چگالی احتمال آن مطابق شکل ۱۶ - ۱ به صورت زیر است :

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\, e^{-x^2/2\sigma^2} & x \geq 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{1-64}$$



شکل (۱۶ - ۱)

در سیستم های مخابراتی ، مقدار دامنه سیگنال دریافتی را معمولاً به صورت یک متغیر تصادفی با توزیع ری‌لی مدل می‌کنند .

۸ - ناکاگامی – m:

Nakagami-m

تابع توزیع این متغیر تصادفی به صورت زیر تعریف می شود .

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{۲}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^m x^{۲m-۱}\, e^{-mx^۲/\Omega} & x \geq ۰ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱-۶۵)$$

باید توجه کرد که به ازاء $m = ۱$

تابع توزیع ناکاگامی به تابع توزیع ری‌لی تبدیل می‌شود .

در مقایسه با توزیع ری‌لی ، توزیع ناکاگامی m انعطاف بیشتری برای مدل نمودن تغییرات تصادفی کانال های مخابراتی ، از خود نشان می دهد .

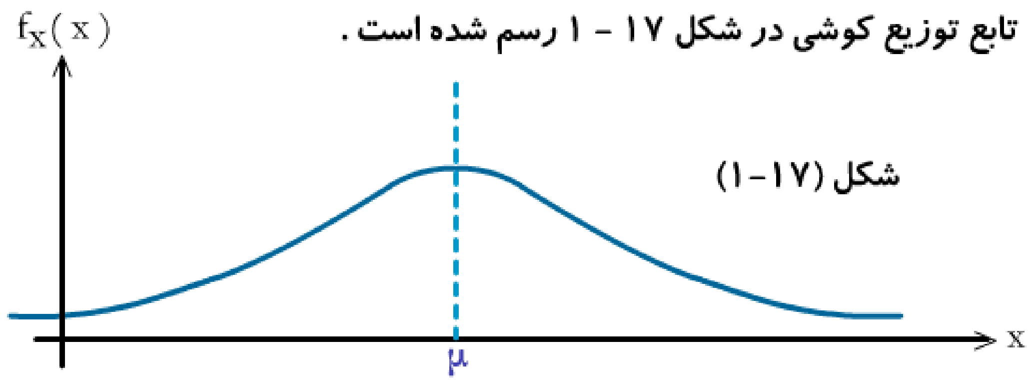
۹ - کوشی :

Cauchi

تابع توزیع این متغیر تصادفی که به صورت $X \sim C(\alpha, \mu)$ نشان داده می شود در زیر تعریف شده است .

$$f_x(x) = \frac{\alpha/\pi}{\alpha^۲ + (x-\mu)^۲} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (۱-۶۶)$$

تابع توزیع کوشی در شکل ۱۷ - ۱ رسم شده است .



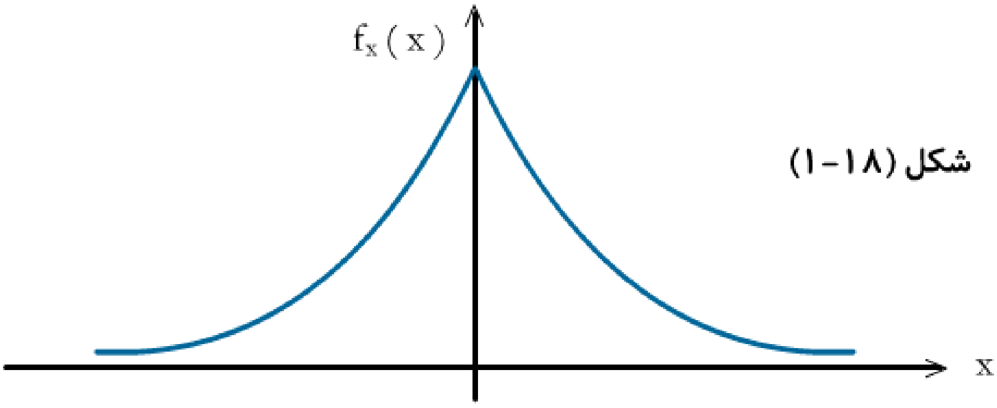
شکل (۱-۱۷)

۱۰ - لاپلاس :

Laplace

تابع توزیع این متغیر تصادفی که در شکل ۱۸ - ۱ نشان داده شده است ، عبارت است از :

$$f_x(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x|/\lambda} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad (1-67)$$



شکل (۱-۱۸)

متغیرهای تصادفی نوع گسسته

۱- برنولی :

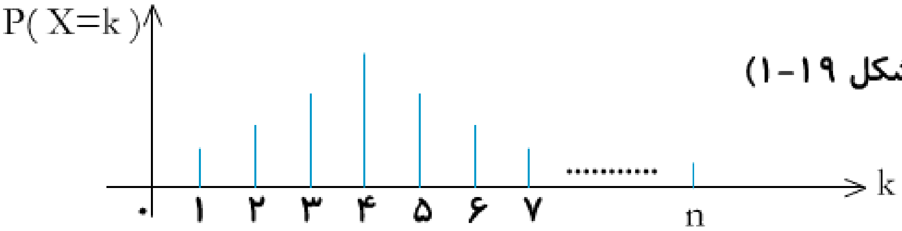
متغیر برنولی (Bernoulli) X **مقادیر (۰ و ۱) را اختیار کرده و احتمال آنها عبارت است از :**

$$P(X=0) = q \quad , \quad P(X=1) = P \qquad (1-68)$$

۲- دو جمله ای :

متغیر X را هنگامی دارای توزیع دو جمله ای یعنی $X \sim B(n,p)$ **می نامیم که**

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad , \quad k = 0,1,2,\dots\dots,n \qquad (1-69)$$

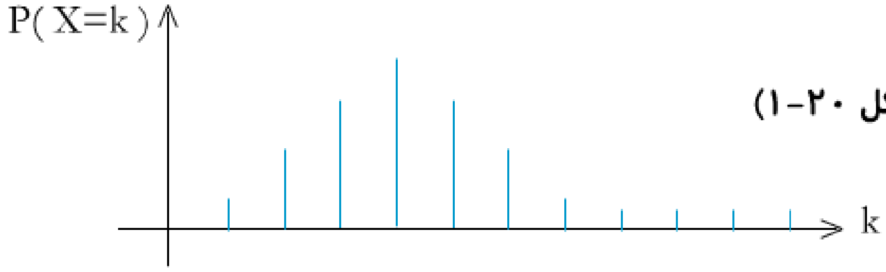


(شکل ۱-۱۹)

۳- پواسون :

متغیر تصادفی X را هنگامی پواسون یعنی $X \sim P(\lambda)$، می‌توان نامید که

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad , k = ۰، ۱، ۲ ، .... ، \infty \qquad (۱-۷۰)$$



(شکل ۲۰-۱)

۴- یکنواخت گسسته:

$$P(X=k) = \frac{۱}{N} \quad , k = ۱،۲،......، N$$

۵- هندسی :

تابع توزیع این متغیر تصادفی یعنی $X \sim g(p)$ عبارت است از:

$$P(X=k) = p\,q^k \quad , k = ۰،۱،۲،....، \infty \quad \text{و} \quad q = ۱ - p \qquad (۱-۷۱)$$

۶- فوق هندسی:

Hypergeometric

تابع توزیع این متغیر تصادفی عبارت است از :

$$P(X=k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad , \max(۰, m+n-N) \le k \le \min(m,n) \qquad (۱-۷۲)$$

۷- دو جمله ای منفی :

تابع توزیع این متغیر تصادفی یعنی $X \sim NB(r,p)$

به شکل زیر می باشد .

$$P(X=k) = \binom{k-۱}{r-۱} p^r q^{k-r} \quad , k = r , r+۱ ,....... \qquad (۱-۷۳)$$

تقریب های متغیر تصادفی دو جمله ای :

فرض کنید X یک متغیر تصادفی دو جمله ای باشد . در این صورت با توجه به رابطه (۱-۴۵) می توان گفت :

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (۱-۷۴)$$

از آنجا که ضریب دو جمله ای $\binom{n}{k} = n!/(n-k)!k!$

با افزایش n به سرعت افزایش می یابد ،

محاسبه احتمال مندرج در رابطه (۱-۷۴) به ازاء n بزرگ امری مشکل خواهد بود . در این مورد دو تقریب بسیار مفید را می‌توان به‌کار برد .

الف) تقریب نرمال (قضیه Demoivre_Laplace) :

اگر پارامتر p را ثابت در نظر گرفته و n به سمت بی نهایت میل کند ،

در این صورت به ازاء k که حول np به اندازه $\sqrt{npq}$

تغییر می‌کند می‌توان تقریب زیر را به کار برد :

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-(k-np)^2/2npq}$$

بنابراین اگر k_1, k_2 در رابطه (۱-۷۴) در محدوده $(np-\sqrt{npq}\ ,\ np+\sqrt{npq})$ قرار داشته باشندمی توان مجموع مندرج در رابطه (۱-۷۴) را توسط انتگرال تقریب زده و آن را به صورت زیر ساده نمود:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-(x-np)^2/2npq} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \qquad (۱-۷۵)$$

که $x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$, $x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq}$ می باشد .

احتمال فوق را می توان بر حسب انتگرال

نرمالیزه شده زیر که مقدار آن در جدول (۱-۱) درج گردیده است بیان نمود

x	erf(x)	x	erf(x)	x	erf(x)	x	erf(x)
0.05	0.01994	0.80	0.28814	1.55	0.43943	2.30	0.48928
0.10	0.03983	0.85	0.30234	1.60	0.44520	2.35	0.49061
0.15	0.05962	0.90	0.31594	1.65	0.45053	2.40	0.49180
0.20	0.07926	0.95	0.32894	1.70	0.45543	2.45	0.49286
0.25	0.09871	1.00	0.34134	1.75	0.45994	2.50	0.49379
0.30	0.11791	1.05	0.35314	1.80	0.46407	2.55	0.49461
0.35	0.13683	1.10	0.36433	1.85	0.46784	2.60	0.49534
0.40	0.15542	1.15	0.37493	1.90	0.47128	2.65	0.49597
0.45	0.17364	1.20	0.38493	1.95	0.47441	2.70	0.49653
0.50	0.19146	1.25	0.39435	2.00	0.47726	2.75	0.49702
0.55	0.20884	1.30	0.40320	2.05	0.47982	2.80	0.49744
0.60	0.22575	1.35	0.41149	2.10	0.48214	2.85	0.49781
0.65	0.24215	1.40	0.41924	2.15	0.48422	2.90	0.49813
0.70	0.25804	1.45	0.42647	2.20	0.48610	2.95	0.49841
0.75	0.27337	1.50	0.43319	2.25	0.48778	3.00	0.49865

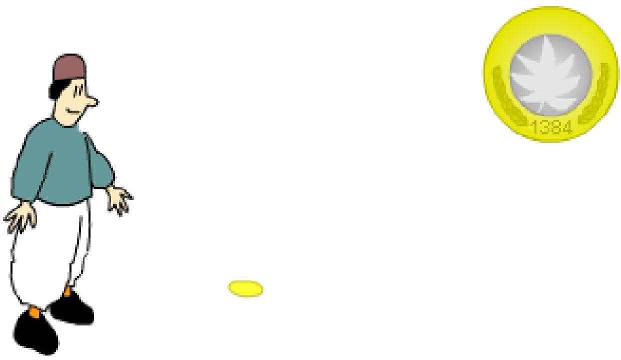
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-y^2/2} dy = \mathrm{erf}(-x) \qquad (1\text{-}76)$$

برای مثال اگر x_1 , x_2 هر دو مثبت باشند می توان نتیجه گرفت که :

$$P(k_1 \le X \le k_2) = \mathrm{erf}(x_2) - \mathrm{erf}(x_1) \qquad (1\text{-}77)$$

مثال ۶-۱:

یک سکه بدون نقص را (یعنی نتایج شیر و خط متساوی الاحتمال هستند) را ۵۰۰۰ بار به هوا پرتاب می کنیم .
احتمال اینکه تعداد شیرها بین ۲۴۷۵ و ۲۵۲۵ باشد چقدر است؟



در واقع باید احتمال $P(۲۴۷۵ \leq X \leq ۲۵۲۵)$ را محاسبه کنیم.

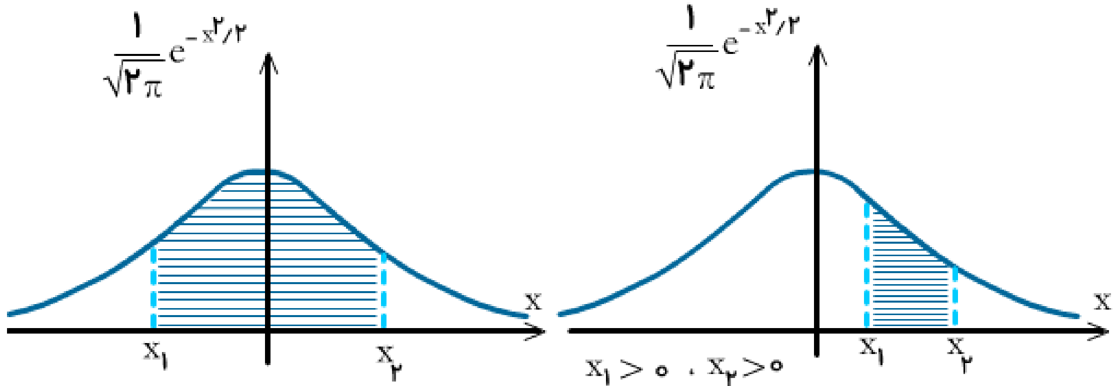
با توجه به بزرگ بودن n می‌توان از تقریب نرمال استفاده کرد.

در این حالت $p = ۱/۲$ ، $np = ۲۵۰۰$ ، $\sqrt{npq} \approx ۳۵$ می باشد ،

چون $np+\sqrt{npq} = ۲۵۳۵$ ، $np-\sqrt{npq} = ۲۴۶۵$ می باشد .

تقریب به ازاء $k_۱ = ۲۴۷۵ , k_۲ = ۲۵۲۵$ معتبر است . بنابراین :

$$x_۱ = \frac{k_۱ - np}{\sqrt{npq}} = -\frac{۵}{۷} \quad , \quad x_۲ = \frac{k_۲ - np}{\sqrt{npq}} = \frac{۵}{۷}$$



شکل (۲۱-۱)

چون $x_1 < 0$ است ، با توجه به شکل (۲۱-۱ ب) احتمال فوق از رابطه

$$p(2475 \leq X \leq 2525) = erf(x_2) - erf(x_1) = erf(x_2) + erf(|x_1|)$$

$$= 2erf(\frac{5}{7}) = 0/516$$

به طوریکه در محاسبه فوق از جدول ۱-۱ $\left(erf(0/7) = 0/258\right)$ استفاده شده است .

ب) تقریب پواسون :

همان طور که در بخش قبل بیان شد به ازاء n بزرگ تقریب گوسی برای یک متغیر تصادفی دو جمله ای فقط هنگامی اعتبار دارد که p ثابت بوده و به عبارت دیگر $npq >> 1$ و $np >> 1$ باشد .حال اگر np کوچک بوده و یا اگر با افزایش n حاصلضرب np افزایش نیابد باید چه کار کرد ؟

اگر به عنوان مثال $n \to \infty$ و $p \to 0$ به نحوی که $np = \lambda$ عدد ثابتی باشد ، بدیهی است مورد فوق رخ خواهد داد . در حقیقت ، بسیاری از پدیده های تصادفی از چنین الگوئی تبعیت می‌کنند . تعداد کل ارتباط ها در یک خط تلفنی ، تعداد کل حوادثی که از یک شرکت بیمه می توانند خسارت دریافت کنند چنین رفتاری را از خود بروز می‌دهند . مکالمات تلفنی توسط یک خط تلفن را که به صورت تصادفی آغاز می گردند در نظر بگیرید .

فرض کنید n بیانگر تعداد کل مکالمات در بازه زمانی

$(0,T)$ باشد . با استناد به تجربه ، اگر $T \to \infty$

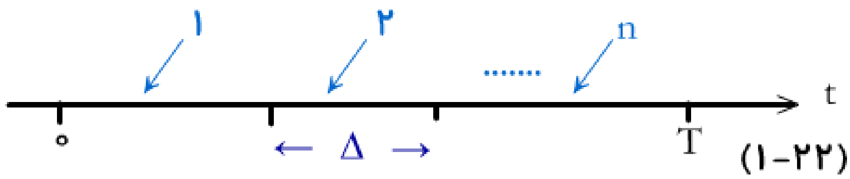
در این صورت $n \to \infty$ میل کرده و می توان فرض نمود که $n=\mu T$ می باشد .

حال مطابق شکل ۲۲-۱ بازه کوچکی به مدت Δ را در نظر بگیرید .

اگر فقط یک ارتباط برقرار شود ، احتمال (p) این که این ارتباط در آن بازه رخ دهد ،

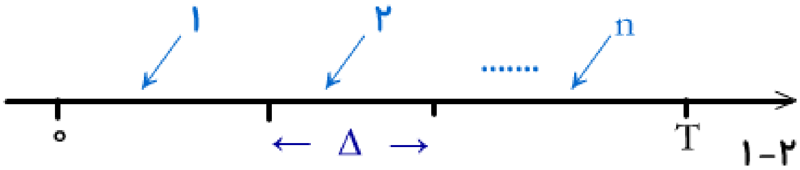
به اندازه نسبی آن در مقایسه با T بستگی دارد .

پس می توان فرض کرد که $p=\Delta / T$ است .



شکل (۲۲-۱)

توجه کنید که اگر $T\to\infty$ کند، $p \to 0$ میل خواهد کرد .



شکل ۱-۲۲

در هر صورت در این حالت $np = (\mu T).(\Delta/T) = \mu\Delta = \lambda$ مقداری ثابت بوده و تقریب نرمال دیگر معتبر نیست . تصورکنید که بازه Δ در شکل ۱-۲۲ مورد نظر ما است . هر ارتباط تلفنی را می توان یک آزمایش برنولی در نظر گرفت به طوری که نتیجه "قبول" (A) برقراری ارتباط در بازه Δ و نتیجه "مردود" $(\overline{A})$ برقراری ارتباط در بیرون بازه Δ تعریف می شود . بنابراین احتمال $P_n(k)$ یعنی برقراری k ارتباط تلفنی (با هرترتیبی) در بازه زمانی به طول Δ توسط توزیع دو جمله ای قابل تعیین است .

$$p_n(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

که در آن $n \to \infty , p \to 0$ میل کرده ولی $np = \lambda$ می باشد .

رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت :

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-k+1)}{n!} \times \frac{(np)^k}{k!} (1-np/n)^{n-k}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}$$

بنابراین :

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , np = \lambda \qquad (1-78)$$

چون حاصل ضرب های محدود

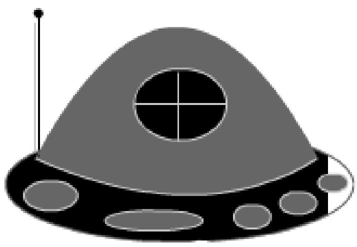
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)........\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

و نیز $(1-(\lambda/n))^k$ **با** $n\to\infty$ **به مقدار واحد میل کرده و**

$\lim\limits_{n\to\infty}(1-(\lambda/n))^n = e^{-\lambda}$ **خواهد بود .**

طرف راست رابطه (۱-۷۸) تابع توزیع پواسون را بیان کرده و تقریب پواسون برای متغیر تصادفی دو جمله ای در شرایطی است که پارامتر های این متغیر دو جمله ای یعنی p,n **به دو مقدار افراطی** $(p\to 0,\ n\to\infty)$ **همگرا شده ولی حاصل ضرب آنها** (np) **مقدار ثابتی باقی بماند .**

مثال ۷-۱:



یک سفینه فضایی دارای ۱۰۰۰۰۰ قطعه می باشد ، $(n\to\infty)$

احتمال این که هر یک قطعه معیوب باشد 2×10^{-5} **است .** $(p\to 0)$

مأموریت این سفینه هنگامی مخاطره آمیز است که پنج یا بیش از پنج قطعه معیوب باشد ، احتمال پیشآمد مخاطره آمیز مأموریت سفینه را تعیین کنید .

در این مورد ، n **بزرگ و** p **کوچک است پس تقریب پواسون معتبر خواهد بود .**

پس $np = \lambda = 100/000 \times 2 \times 10^{-5} = 2$

$$P(X\ge 5) = 1 - P(X\le 4) = 1-\sum_{k=0}^{4} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1 - e^{-2}\sum_{k=0}^{4}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= 1 - e^{-2}\left(1+2+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right) = 0/052$$

تابع چگالی احتمال شرطی

به ازاء هر دو پیشآمد A و B احتمال شرطی A مشروط به B را به صورت زیر تعریف کردیم :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , P(B)\neq 0$$

با توجه به این که تابع توزیع تجمعی $F_x(x)$ به صورت

$$F_x(x)=P\{X(\xi)\leq x\}$$

بیان می شود می توان تابع توزیع شرطی متغیر تصادفی X مشروط به پیشآمد B را به شکل زیر تعریف کرد :

$$F_x(x/B)=P\{X(\xi)\leq x/B\}=\frac{P\{(X(\xi)\leq x)\cap B\}}{P(B)} \quad (1\text{-}79)$$

بنابراین تعریف توزیع شرطی به احتمال شرطی بستگی دارد و چون توزیع مذکور از تمام قواعد احتمال تبعیت می‌کند می‌توان نتیجه گرفت که توزیع شرطی همان خواص تابع توزیع را دارد . به طور اخص ، خواص زیر قابل توجه است :

$$F_x(+\infty/B)=\frac{P\{(X(\xi)\leq +\infty)\cap B\}}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

$$F_x(-\infty/B)=\frac{P\{(X(\xi)\leq -\infty)\cap B\}}{P(B)}=\frac{P(\Phi)}{P(B)}=0 \quad (1\text{-}80)$$

علاوه بر این

$$P(x_1<X(\xi)\leq x_2/B)=\frac{P\{(x_1<X(\xi)\leq x_2)\cap B\}}{P(B)}$$

$$=F_x(x_2/B)-F_x(x_1/B) \quad (1\text{-}81)$$

چون به ازاء $x_2 \geq x_1$ ، $(X(\xi) \leq x_2) = (X(\xi) \leq x_1) \cup (x_1 < X(\xi) \leq x_2)$

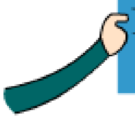
تابع چگالی شرطی ، مشتق تابع توزیع شرطی است . پس

$$f_x(x/B) = \frac{dF_x(x/B)}{dx} \quad (۱-۸۲)$$

و بالطبع می‌توان نتیجه گرفت که :

$$F_x(x/B) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u/B)\,du$$

و از ادغام رابطه فوق با رابطه (۱-۸۱) خواهیم داشت :



$$P(x_1 < X(\xi) \leq x_2/B) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x/B)\,dx \quad (۱-۸۳)$$

مثال ۸-۱:

فرض کنید تابع توزیع $F_x(x)$ دردست بوده و پیشآمد B به صورت $B=\{X(\xi) \leq a\}$ تعریف می شود. تابع $f_x(x/B)$ را تعیین کنید .

ابتدا تابع توزیع شرطی $F_x(x/B)$ را به دست می آوریم . با استناد به (۱-۷۹) و تعریف پیشامد B می‌توان نتیجه گرفت که :

$$F_x(x/B) = \frac{P\{(X \leq x) \cap (X \leq a)\}}{P\{X \leq a\}}$$

به ازاء $x < a$ ، $(X \leq x) \cap (X \leq a) = (X \leq x)$ بوده ، بنابراین

$$F_x(x/B) = \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)} = \frac{F_x(x)}{F_x(a)}$$

به ازاء $x \geq a$ ، $(X \leq x) \cap (X \leq a) = (X \leq a)$ بوده و در نتیجه $F_x(x/B) = ۱$ خواهد بود .

پس

$$F_X(x/B)=\begin{cases}\dfrac{F_X(x)}{F_X(a)} & , \quad x<a \\ 1 & , \quad x\geq a\end{cases}$$

و در نتیجه

$$f_X(x/B)=\frac{d}{dx}F_X(x/B)=\begin{cases}\dfrac{f_X(x)}{F_X(a)} & , \quad x<a \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

مثال ۹-۱:

فرض کنید B پیشآمد $\{a<X(\xi)<b\}$ ، $b>a$ بوده و تابع توزیع $F_X(x)$ در دست و معلوم است .توابع $f_X(x/B), F_X(x/B)$ را تعیین کنید ؟

می دانیم که

$$F_X(x/B)=P\{X(\xi)\leq x/B\}=\frac{P\{(X(\xi)\leq x)\cap(a<X(\xi)\leq b)\}}{P\{a<X(\xi)\leq b\}}$$

$$=\frac{P\{(X(\xi)\leq x)\cap(a<X(\xi)\leq b)\}}{F_X(b)-F_X(a)}$$

به ازاء $x<a$ می توان نوشت : $\{X(\xi)\leq x\}\cap\{a<X(\xi)\leq b\}=\Phi$

و در نتیجه $F_X(x/B)=0$ خواهد بود

به ازاء $a \le x < b$ بدیهی است

$$\{ X(\xi) \le x \} \cap \{ a < X(\xi) \le b \} = \{ a < X(\xi) \le x \}$$

و در نتیجه

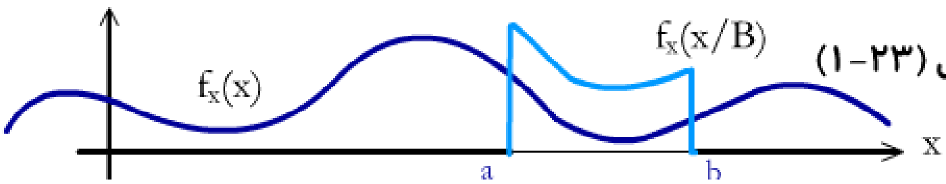
$$F_x(x/B) = \frac{P(a < X(\xi) \le x)}{F_x(b) - F_x(a)} = \frac{F_x(x) - F_x(a)}{F_x(b) - F_x(a)}$$

و در پایان به ازاء $x \ge b$ می توان گفت :

$$\{ X(\xi) \le x \} \cap \{ a < X(\xi) \le b \} = \{ a < X(\xi) \le b \}$$

و بنابراین ۱ $F_x(x/B) =$ می باشد .

با استناد به نتایج فوق تابع چگالی احتمال شرطی مطابق شکل ۲۳-۱ عبارت است از



شکل (۲۳-۱)

$$f_x(x/B) = \begin{cases} \dfrac{f_x(x)}{F_x(b) - F_x(a)} & , \quad a < x \le b \\ ۰ & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

می توان با استفاده از تابع چگالی احتمال شرطی

به همراه قضیه بیز اطلاعات پیشین A-priori

خویش را در مورد احتمال وقوع پیشآمد ها بر اساس مشاهدات جدید بروز کرد .

به طور ایده آل هر اطلاعات جدید باید برای بروز کردن شناخت ما به کار رود.

همان گونه که در مثال زیر ملاحظه خواهیم کرد ، تابع چگالی احتمال شرطی به همراه

قضیه بیز امکان بروز کردن سیستماتیک را به ما می دهد .

به ازاء دو پیشآمد A , B قضیه بیز بیان می کند که

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

فرض کنید که : $B=\{x_1 < X(\xi) \le x_2\}$

باشد ، در این صورت رابطه فوق را به این شکل می‌توان نوشت:

$$P\{A/(x_1 < X(\xi) \le x_2)\} = \frac{\left((x_1 < X(\xi) \le x_2)/A\right)P(A)}{P(x_1 < X(\xi) \le x_2)}$$

$$= \frac{F_x(x_2/A) - F_x(x_1/A)}{F_x(x_2) - F_x(x_1)} P(A) = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f_x(x/A)dx}{\int_{x_1}^{x_2} f_x(x)dx} P(A)$$

علاوه بر این فرض کنید که $x_1 = x, x_2 = x+\varepsilon, \varepsilon > 0$ باشد . در حد هنگامی که $\varepsilon \to 0$ میل می کند می توان نتیجه گرفت :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P\{A/(x < X(\xi) \le x+\varepsilon) = P(A/X(\xi) = x) = \frac{f_x(x/A)}{f_x(x)} P(A)$$

$$f_{X/A}(x/A) = \frac{P(A/X=x) f_x(x)}{P(A)} \quad (۱-۸۴)$$

از رابطه فوق می‌توان این نتیجه را نیز به دست آورد :

$$P(A) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x/A)dx}_{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A/X=x) f_x(x)dx$$

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A/X=x) f_x(x)dx \quad (۱-۸۵)$$

و از ترکیب رابطه فوق با رابطه (۸۴-۱) داریم :

$$f_{X/A}(x/A)=\frac{P(A/X=x)f_x(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}P(A/X=x)f_x(x)dx} \quad (۱-۸۶)$$

به منظور تاکید بر اهمیّت و کاربرد فرمول بندی فوق موضوع پرتاب سکه را مورد ارزیابی مجدد قرار می دهیم

مثال ۱۰-۱ :

فرض کنید $p=P(H)$

بیانگر احتمال وقوع شیر در آزمایش پرتاب سکه به هوا می‌باشد .

به ازاء هر سکه مفروض ، احتمال پیشین p می تواند هر مقدار در بازه $(۰ , ۱)$ را اختیار کند .

در غیاب هرگونه اطلاعات اضافی ، می توان فرض کرد که تابع چگالی احتمال پیشین $f_p(p)$ در بازه مذکور یک توزیع یکنواخت است .

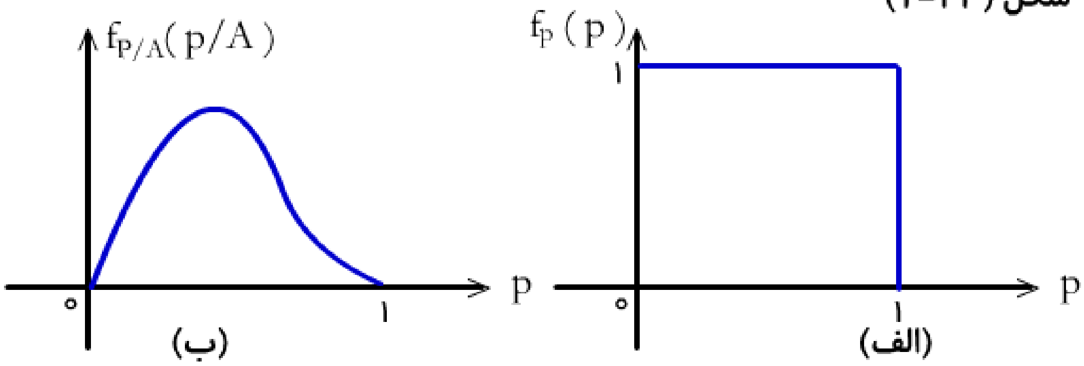
اکنون تصور کنید که عملاً آزمایشی شامل پرتاب سکه به تعداد n بار را انجام داده و k نتیجه شیر را ملاحظه می کنیم .

این نتایج اطلاعات جدید هستند .

حال به این سوال باید پاسخ داد که بر اساس اطلاعات جدید چگونه می توان $f_p(p)$ را بروز کرد

توجه کنید که تابع چگالی احتمال پسین p در رابطه فوق توزیع یکنواخت نبوده بلکه توزیع بتا می باشد .

شکل (۲۴-۱)



می توان این تابع چگالی احتمال پسین را به کار برده و پیش بینی های بیشتری را صورت داد .

برای مثال ، بر اساس آزمایش فوق ، در مورد احتمال حصول نتیجه شیردر پرتاب $(n+1)$ ام بعدی سکه چه می توان گفت ؟

فرض کنید :

"حصول نتیجه شیر در پرتاب $(n+1)$ ام مشروط به وقوع k شیر در n پرتاب قبلی" $B=$ باشد . بدیهی است که $P(B/P=p)=p$

و با استناد به رابطه (۸۵-۱) می توان نوشت :

$$P(B)=\int_{0}^{1} P(B/P=p)f_p(p/A)dp$$

باید دقت شود که برخلاف رابطه (۸۵-۱) ، در رابطه فوق ، تابع چگالی احتمال پسین به منظور انعکاس اطلاع ما در مورد آزمایشی که قبلاً انجام شده ، به کار رفته است . از ترکیب رابطه فوق و رابطه (۸۷-۱) می توان نتیجه گرفت که :

$$P(B)=\int_{0}^{1} p.\frac{(n+1)!}{(n-k)!k!} \; p^k q^{n-k} dp=\frac{k+1}{n+2}$$

پس اگر $k=6$, $n=10$ باشد ،در این صورت $P(B)=\frac{7}{12}=0/58$

بوده که نتیجه واقعی‌تری در مقایسه با $p=0/5$ می باشد .

در پایان ، باید گفت اگر احتمال پیشامد X نامعلوم است ، در مورد تابع چگالی احتمال پیشین آن ، قضاوت وزن داده شده ای را نباید به عمل آورد .

معمولاً توزیع یکنواخت یک فرض معقول و منطقی در غیاب هرگونه اطلاعات دیگر است .

سپس نتایج تجربی (A) به دست آمده و دانش و شناخت ما در مورد X بایستی بروز شده و این اطلاعات جدید را منعکس سازد .

قاعده بیز در تعیین تابع چگالی احتمال پسین X مشروط به A به ما کمک خواهد کرد . از این مرحله به بعد ، این تابع چگالی احتمال پسین

$$f_{X/A}(x/A)$$

بایستی برای انجام پیش بینی ها و محاسبات بیشتر مورد استفاده قرار گیرد .

مسائل فصل ۱

۱-۱ نشان دهید که :

(الف) - $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \cup \overline{\bar{A} \cup B} = A$

(ب) - $(A \cup B)(\overline{AB}) = A\bar{B} \cup \bar{A}B$

۱-۲ اگر $A=\{2 \le x \le 5\}$ و $B=\{3 \le x \le 6\}$ باشد، آنگاه $A \cup B$ ، AB ، $(A \cup B)(\overline{AB})$ را بیابید.

۱-۳ نشان دهید که :

(الف) اگر $P(A)=P(B)=P(AB)$ باشد، آنگاه $P(A\bar{B} \cup \bar{A}B)=0$

(ب) - اگر $P(A)=P(B)=1$ باشد، آنگاه $P(AB)=1$

۱-۴ اگر $S=\{1 ، 2 ،3 ،4\}$ باشد کوچکترین میدانی را بیابید که شامل مجموعه های $\{1\}$ و $\{3 ، 2\}$ باشد.

۱-۵ اگر $A\subset B$ و $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۳}$ باشد، آنگاه $P(A|B)$ و $P(B|A)$ را بیابید.

۱-۶ نشان دهید که

$$P(ABC)=P(A|BC)P(B|C)P(C)$$

و

$$P(AB|C)=P(A|BC)P(B|C)$$

می باشد.

۱-۷ یک تماس در زمان t د رجایی که t یک نقطهٔ تصادفی در فاصله $(۱۰,۰)$ می باشد.

(الف) $P\{۶\le t\le ۸\}$ را بیابید

(ب) $P\{۶\le t\le ۸|t>۵\}$ را بیابید.

۱-۸ فضای S مجموعه ای از اعداد مثبت t است. نشان دهید که اگر $P\{t_{\circ}\le t\le t_{\circ}+t_{۱}|t\ge t_{\circ}\}=P\{t\le t_{۱}\}$ برای هر

$t_{\circ}$ و $t_{۱}$ باشد، آنگاه $p\{t\le t_{۱}\}=۱-e^{-ct_{۱}}$ است.

c مقداری ثابت می باشد.

۱-۹ ده مسافر وارد قطاری می شوند که دارای سه واگن است. فرض کنید مسافرین به صورت تصادفی اسکان می یابند، احتمال اینکه در واگن اول سه مسافر اسکان یابد چقدر است ؟

۱-۱۰ یک قطار و یک اتوبوس به طور تصادفی در فاصلهٔ ساعت ۹ و ۱۰ صبح به ایستگاه می رسند. قطار برای ۱۰ دقیقه توقف نموده و اتوبوس x دقیقه توقف می کند. x را چنان بیابید که احتمال ملاقات قطار و اتوبوس برابر ۵% باشد.

$$\frac{m(n-۱)...(n-k+۱)}{۱.۲.....k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

۱-۱۱ سه پیشآمد ادامه را در نظر بگیرید:

(الف) حداقل ۱ شش وقتی‌که شش تاسی پرتاب می شود بدست آید،

(ب) حداقل ۲ شش وقتی‌که ۱۲ تاسی انداخته می شود بدست آید

(ج) حداقل ۳ شش وقتی‌که ۱۸ تاسی پرتاب می شود بدست آید.

کدام پیشآمد دارای احتمال بیشتری است؟

۱-۱۲ سه تاس پرتاب می شود و بازیکن‌روی هر یک از اعداد ۱،۲،۳، ۴،۵،۶ می تواند شرط بندی کند. اگر عدد یک،دو یا سه هر سه تاس ظاهرشود بازیکن به ترتیب یک، دو یا سه برابر جایزهٔ اصلی بعلاوهٔ پول خودش را پس می گیرد. انتظار باخت را بر حسب واحد جایزه برای بازیکن تعیین کنید.

۱-۱۳ نشان دهید که اگر $f(x)$ متقارن حول نقطه $x=\eta$ و $a=\eta-x_{\alpha/2}=x_{1-\alpha/2}-\eta$ باشد، آنگاه $P\{\eta-a<X<\eta+a\}=1-a$ است.

۱-۱۴ متغیر تصادفی X ، $N(\eta,\sigma)$ و $P\{\eta-a<X<\eta+a\}=p_k$ است.

(الف) p_k را برای k برابر ۱،۲و۳ بیابید.

(ب) k را برای p_k برابر با ۰/۹ ، ۰/۹۹ و ۰/۹۹۹ بیابید.

(ج) اگر $P\{\eta-z_u\sigma<X<\eta+z_u\sigma\}=\gamma$ باشد، z_u را بر حسب γ بدست آورید.

۱-۱۵ مقاومت R را برای هر مقاومت تولید شده از خط تولید اندازه گیری نموده و مواردی را که بین۹۶ و ۱۰۴ اهم باشد، می پذیریم. درصد قابل قبول را تعیین کنید، اگر

(الف) R یکنواخت بین ۹۵ و ۱۰۴ باشد.

(ب) R نرمال با $\eta=100$ و $\sigma=2$ اهم باشد.

۱-۱۶ نشان دهید که اگر متغیر تصادفی X، دارای چگالی ارلنگ با $n=۲$ باشد، آنگاه $F_x(x)=(۱-e^{-cx}-cxe^{-cx})U(x)$ است.

۱-۱۷ فضای S شامل تمام نقاط t_i در فاصلهٔ $(۰,۱)$ و $P\{۰\le t_i \le y\}=y$ برای هر $y\le ۱$ است. تابع $G(x)$ از $G(-\infty)=۰$ تا $G(\infty)=۱$ افزایش می یابد، بنابراین دارای معکوس $G^{-1}(y)=H(y)$ است. متغیرتصادفی X طوری است که $X(t_i)=H(t_i)$ می باشد. نشان دهید که $F_x(x)=G(x)$ است.

۱-۱۸ سکه ای به طور آزاد سه مرتبه پرتاب می شود و متغیر تصادفی X برابر تعداد کل شیرها می باشد، $F_x(x)$ و $f_x(x)$ را بیابید و رسم کنید.

۱-۱۹ نشان دهید

$P(A)=P(A|X\le x)F(x)+P(A|X>x)[۱-F(x)]$ است.

۱-۲۰ نشان دهید که

$$F_x(x|A)=\frac{P(A|X\le x)F_x(x)}{P(A)}$$

۱-۲۱ احتمال آمدن خط در یک پرتاب تصادفی سکه متغیر تصادفی P با توزیع یکنواخت در فاصله $(۰,۱)$ است.

(الف) $P\{۰/۳\le P\le ۰/۷\}$ را بیابید

(ب) سکه ۱۰ بار انداخته می شود و خط ۶ بار نشان داده می شود، یک احتمال پسین را که P بین ۰/۷ و ۰/۳ باشد، بیابید.

۱ - ۲۲ سکه ای n بار به طور آزاد پرتاب می شود. n را طوری بیابید که احتمال بودن تعداد خط ها بین $۰/۴۹n$ و $۰/۵۲n$ حداقل ۰/۹ باشد.

پاسخ: $G(۰/۰۴\sqrt{n})+G(۰/۰۲\sqrt{n})\ge ۱/۹ \Rightarrow n>۴۵۵۶$

۱-۲۳ سیستمی دارای ۱۰۰۰ عنصر است، احتمال این که یک یک عنصر مشخص در فاصله (a,b) از کار بیفتد برابر است با $e^{-a/T} - e^{-b/T}$ ، احتمال این که در فاصلهٔ $(۰,T/۴)$ بیش از ۱۰۰ عنصر از کار بیفتد چقدر است؟

۱-۲۴ احتمال اینکه یک راننده در ماه یک تصادف داشته باشد، برابر ۰/۰۲ است. احتمال اینکه در ۱۰۰ ماه فقط سه تصادف داشته باشد، را بیابید.

جواب : نزدیک به $۴e^{-۲/۳}$