فرآیندهای تصادفی

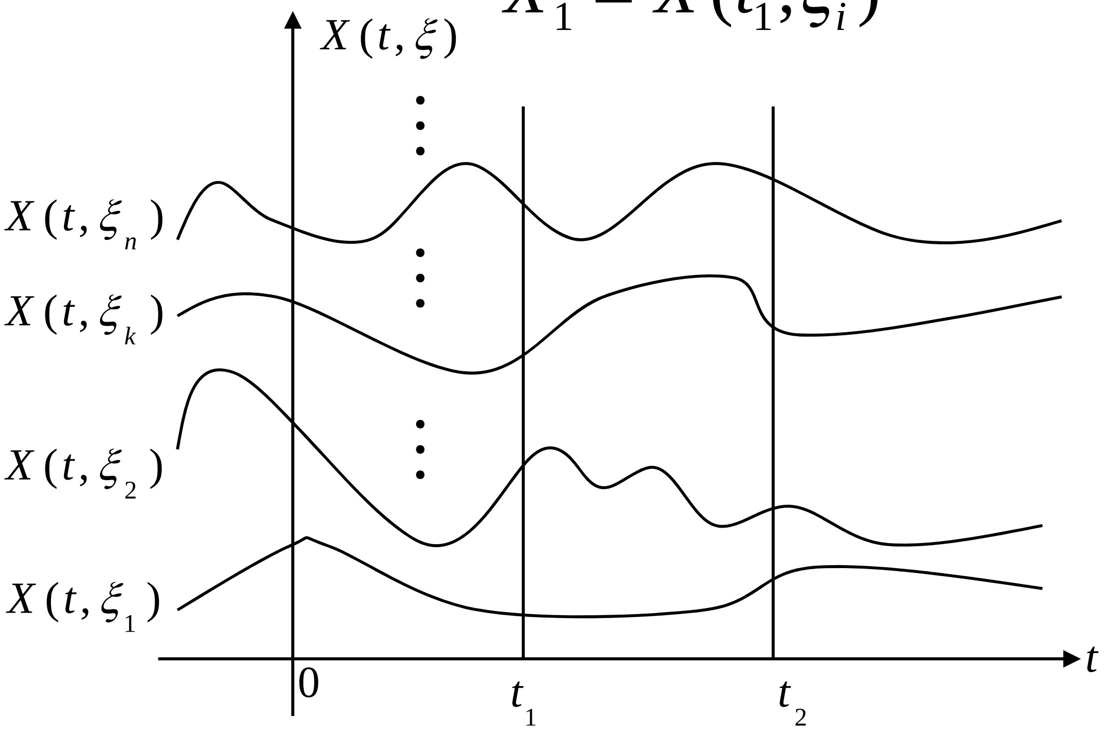
مبحث دوم: معرفی فرآیند های تصادفی
دکتر آقاجانی

۱- تعریف

فرآیند تصادفی

- تابعی از دو متغیر یکی $\xi \in \Omega$ نقطه ای از فضای نمونه(نتیجه آزمایش تصادفی)و دیگری $t \in T$ پارامتر فرآیند که نقطه ای از فضای پارامتر T است.

$$X_1 = X(t_1, \xi_i)$$



توصیف

- توصیف ریاضی: به ازا همه مقادیر t و ξ مقدار فرآیند معلوم است. مثلاً

$$X(t,\xi)=\begin{cases}\cos^2(2t) & \xi>1\\ \xi\sin(10t+\xi) & \xi\le 1\end{cases}$$

- توصیف تحلیلی: فرآیند تابعی از یک یا چند متغیر تصادفی است.

➢ *زاویه در این عبارت یک متغیر تصادفی یکنواخت است.* $X(t)=a\cos(\omega_0 t+\varphi),$

- توصیف آماری: توصیف توابع احتمال متغیر های فرآیندهای تصادفی

$$F_{X(t)}(x)=F_X(x;t)=P\{X(t)\le x\} \qquad f_X(x;t)=\frac{dF_X(x;t)}{dx}$$

توصیف آماری

- توصیف آماری مرتبه اول: $f_X(x;t)$

- توصیف آماری مرتبه دوم: $f_{X(t),X(s)}(x,y)=f_X(x,y;t,s)$
  - *توزیع کناری(مرتبه اول)*

$$f_X(x;t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x,y;t,s)dy$$

- توصیف آماری مرتبه n ام

$$f_{X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)}(\underline{x})=f_X(\underline{x};t_1,t_2,\dots,t_n)=f_X(\underline{x};\underline{t})$$

  - *با انتگرال گیری می توان به توصیف های مرتبه پایین تر رسید.*
  - *توصیف آماری کامل وقتی است که $n\rightarrow\infty$ باشد.*

دو فرآیند تصادفی

- دو فرآیند با دو فضای پارامتر T و 'T

$$X(t,\xi)=X(t)$$
$$Y(t',\xi)=Y(t')$$

- توصیف آماری توأم مرتبه n و m

$$f_{X(t_1)X(t_2)....X(t_n)Y(t'_1)....Y(t'_m)}(\underline{x},\underline{y})=f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}')$$

➢ *توصیف های آماری توأم مرتبه پایین تر و توصیف های کناری با انتگرال گیری قابل حصول هستند.*

- دو فرایند مستقل: هر بردار از متغیر های یکی با هر بردار از متغیر های دومی مستقل از هم باشند.

$$f_{XY}(\underline{x},\underline{y};\underline{t},\underline{t}')=f_X(\underline{x};\underline{t})f_Y(\underline{y};\underline{t}')$$

- فرآیند مختلط:

$$Z(t,\xi)=X(t,\xi)+jY(t,\xi)$$

۲- ممان های فرآیندها

- ممان اول (متوسط)

$$m_x(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x;t)dx$$

- ممان دوم ساده(تابع همبستگی)

$$R_x(t,s) = E[X(t)X^*(s)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy^* f_X(x,y;t,s)dxdy$$

- ممان دوم مرکزی(تابع کوواریانس)

$$C_X(t,s) = E[\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(s)] = E[(X(t)-m_X(t))(X(s)-m_X(s))^*]$$
$$= R_X(t,s) - m_X(t)m_X^*(s)$$

• فرایند a-وابسته : فرآیندی که متغیر های تصادفی آن با فاصله زمانی بیش از a مستقل هستند.

$$X(t) \perp\!\!\!\perp X(s)$$
$$\forall |t-s| > a$$

• فرایند a-همبسته : فرآیندی که متغیر های تصادفی آن با فاصله زمانی بیش از a ناهمبسته هستند.

$$C_X(t,s) = 0$$
$$\forall |t-s| > a$$

- ممان متقابل ساده (تابع همبستگی متقابل) $R_{XY}(t,t')=E[X(t)Y^*(t')]$
  - ➢ *دو فرآیند متعامد هستند هرگاه هر متغیر یکی با هر متغیر دیگری متعامد باشند.*

$$R_{XY}(t,t')=0 \qquad \Rightarrow R_{X+Y}(t,s)=R_X(t,s)+R_Y(t,s)$$

- ممان متقابل مرکزی(تابع کوواریانس متقابل) $C_{XY}(t,t')=E[\tilde{X}(t)\tilde{Y}^*(t')]$
  - ➢ *دو فرآیند ناهمبسته هستند هرگاه هر متغیر یکی با هر متغیر دیگری ناهمبسته باشند.*

$$C_{XY}(t,t')=0 \qquad \Rightarrow C_{X+Y}(t,s)=C_X(t,s)+C_Y(t,s)$$

- وجود تقارن هرمیتیک

$$R_{XY}(t,t')=R^*_{YX}(t',t)$$
$$C_{XY}(t,t')=C^*_{YX}(t',t)$$
$$R_X(t,s)=R^*_X(s,t)$$
$$C_X(t,s)=C^*_X(s,t)$$

مثال

$$X(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad \varphi \sim U(0,2\pi).$$

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = aE\{\cos(\omega_0 t + \phi)\}$$

$$= a\cos\omega_0 t\ E\{\cos\phi\} - a\sin\omega_0 t\ E\{\sin\phi\} = 0,$$

$$E\{\cos\phi\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\phi\, d\phi = 0 = E\{\sin\phi\}.$$

$$R_X(t,s) = a^2 E\{\cos(\omega_0 t + \phi)\cos(\omega_0 s + \phi)\}$$

$$= \frac{a^2}{2}E\{\cos\omega_0(t-s) + \cos(\omega_0(t+s) + 2\phi)\}$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega_0(t-s).$$

۳- دسته بندی فرآیندها

(مارکف، با نمو مستقل و مارتینگل)

فرآیند با نمو مستقل

- فرآیندی که مقدارش در هر لحظه و کلیه نمو هایش در فاصله های زمانی بدون اشتراک توأماً مستقل باشند.

$$X(t_1) \perp\!\!\!\perp X(t_2)-X(t_1) \perp\!\!\!\perp X(t_3)-X(t_2) \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X(t_{n+1})-X(t_n)$$

$$t_{n+1} \geq t_n \geq \ldots \geq t_1$$

فرآیند مارکوف

- فرآیندی که مقدارش در هر لحظه کلیه سابقه فرآیند را نیز در خود خلاصه کند.(سابقه از نظر تاثیر روی توزیع احتمال متغیر های تصادفی بعدی)

$$f_{X(t_{n+1})}(x_{n+1} \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \dots, X(t_n)=x_n) = f_{X(t_{n+1})}(x_{n+1} \mid X(t_n)=x_n)$$

$$t_{n+1} \geq t_n \geq \dots \geq t_1$$

فرآیند مارتینگل

- فرآیندی است که امید ریاضی مقدارش در هر لحظه مشروط به معلوم بودن مقدارش در چند لحظه قبل ، همان آخرین مقدار معلوم فرآیند باشد.

$$E[X(t_{n+1})\,|\,X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \ldots, X(t_n)=x_n]=x_n$$

$$t_{n+1}\geq t_n\geq \ldots \geq t_1$$

چند قضیه

- قضیه۱: از با نمو مستقل بودن می توان مارکوف بودن را نتیجه گرفت.
- قضیه۲: از با نمو مستقل بودن و داشتن تابع متوسط ثابت می توان مارتینگل بودن را نتیجه گرفت.
- قضیه۳:در فرایند های مارکوف توصیف آماری مرتبه دوم فرآیند یک توصیف کامل آماری است.

$$f_X(\underline{\mathbf{x}};\underline{\mathbf{t}}) = f_X(x_1;t_1)\prod_{i=2}^{n}\frac{f_x(x_{i-1},x_i;t_{i-1},t_i)}{f_x(x_{i-1};t_{i-1})}$$

- قضیه ۴: در فرآیند های با نمو مستقل توصیف آماری مرتبه اول فرآیند بعلاوه توصیف آماری مرتبه اول نمو فرآیند یک توصیف کامل آماری است.

$$f_X(\underline{\mathbf{x}};\underline{\mathbf{t}}) = f_X(x_1;t_1)\prod_{i=2}^{n}f_{\Delta x}(x_i - x_{i-1};t_{i-1},t_i)$$

مثال:

- نشان دهید در یک فرآیند با نمو مستقل:

$$\sigma_{X(t)X(s)} = \begin{cases} \sigma^2_{X(t)}, & t \le s \\ \sigma^2_{X(s)}, & s \le t \end{cases}$$

- حل:

$$t \le s \;\Rightarrow\; \sigma_{X(t)X(s)} = E[\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(s)] = E[\tilde{X}(t)(\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t)+\tilde{X}(t))^*]$$

$$= E[\tilde{X}(t)(\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t))^*] + E[\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(t)]$$

$$\xlongequal{X(t)\perp\perp(X(s)-X(t))} \underbrace{E[\tilde{X}(t)]}_{0}\underbrace{E[(\tilde{X}(s)-\tilde{X}(t))]}_{0} + \sigma^2_{X(t)}$$

۴- فرآیند های ساکن

فرآیندهای ساکن

- فرآیند ساکن
- تعریف: خصوصیات آماری فرآیند با گذشت زمان تغییر نکنند مثلا نویز حرارتی که درجه حرارت آن ثابت نگه داشته شده است.
  - ساکن به مفهوم وسیع (WSS)
  - ساکن به مفهوم اکید (SSS)
- فرآیند ساکن دوری(دوره ای)
- تعریف: خصوصیات آماری فرآیند به صورت متناوب با زمان تغییر کنند مثلا نویز ناشی از حرکت متناوب قطعات مکانیکی
  - ساکن به مفهوم وسیع (WSCS)
  - ساکن به مفهوم اکید (SSCS)

فرآیند WSS (Wide Sense Stationary)

- ممان اول و دوم فرآیند با گذشت زمان تغییر نمی کنند.

$$E\{X(t)\} = m_x$$

$$E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = R_x(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$$

فرآیند SSS(strict Sense Stationary)

- تعریف: توابع احتمال فرآیند با گذشت زمان تغییر نکنند.
- فرآیند SSS مرتبه اول:

$$f_X(x,t) = f_X(x)$$

- فرآیند SSS مرتبه دوم:

$$f_X(x_1,x_2;\ \ t_1,t_2) \equiv f_X(x_1,x_2;\ \ t_1-t_2)$$

- فرآیند SSS مرتبه nام:

$$f_X(x_1,x_2,\cdots x_n;\ \ t_1,t_2\cdots,t_n) \equiv f_X(x_1,x_2,\cdots x_n;\ \ t_1+c,t_2+c\cdots,t_n+c)$$

- از یک فرآیند SSS مرتبه بالا می توان SSS مرتبه پایین تر را نتیجه گرفت.
- SSSمرتبه بی نهایت را SSS کامل گوییم.

فرآیند WSCS (Wide Sense Cyclo Stationary)

- ممان اول و دوم فرآیند به صورت متناوب با زمان تغییر می کنند.

$$E\{X(t)\} = m_X(t) = m_X(t+T_0)$$

$$E\{X(t)X^*(t+\tau)\} = R_x(t,t+\tau) = R_X(t+T_0,t+T_0+\tau)$$

فرآیند SSCS(strict Sense Cyclo Stationary)

- تعریف: توابع احتمال فرآیند به صورت متناوب با زمان تغییر می کنند.
- فرآیند SSCS مرتبه nام: $f_X(x_1, x_2, \cdots x_n; t, t+\tau_1 \cdots; t+\tau_{n-1})$
  - *نسبت به t متناوب با دوره تناوب T0*

- SSCSمرتبه بی نهایت را SSCS کامل گوییم.

فرآیندهای توأماً ساکن

- وقتی فضای پارامتر دو فرآیند یکی باشد(T=T’)

➢ *توأماً WSS بودن دو فرآیند: تک تک WSS می باشند و ممان متقابل آنها نیز مستقل از زمان باشد:*

$$R_{XY}(t+\tau,t)=R_{XY}(\tau)$$

➢ *توأماً SSS بودن مرتبه nام دو فرآیند یعنی توابع احتمال توأم دو فرآیند با زمان تغییر نکند.*

$$f_{XY}(\mathbf{x},\mathbf{y};t,t+\tau_1,\ldots,t+\tau_{n-1},t+\tau'_1,\ldots,t+\tau'_{m-1})=f_{XY}(\mathbf{x},\mathbf{y};\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau'_1,\ldots,\tau'_{m-1})$$

❑ *دو فرآیند می توانند تک تک SSS کامل باشند ولی حتی توأماً WSS هم نباشند.*

❑ *توأماً ساکن دوری نیز نظیر توأما ساکن تعریف می شود.*

چند نکته

- از SSS مرتبه دوم و بالاتر WSS قابل نتیجه گیری است.
- اگر فرآیند X ، ساکن دوری به مفهوم اکید SSCS با دوره تناوب T0 باشد و ϕ یک متغیر تصادفی مستقل از فرایند X با توزیع یکنواخت بین 0و T0 باشد، فرآیند Y یک فرآیند SSS مرتبه nام است.

$$Y(t) = X(t+\phi)$$

- اگر فرآیند X ، ساکن دوری به مفهوم وسیع WSCS با دوره تناوب T0 باشد و یک متغیر تصادفی مستقل از فرایند X با توزیع یکنواخت بین 0و T0 باشد، فرآیند Y یک فرآیند WSS است.

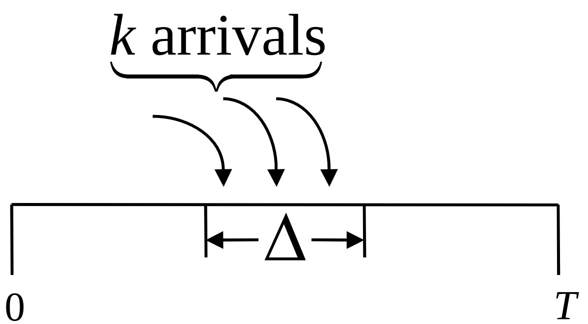
۵- معرفی چند فرآیند تصادفی

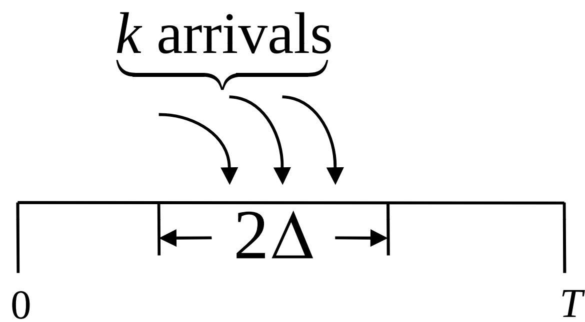
فرآیند پوآسن

- تعداد رخداد پیشامد در بینهایت تکرار مستقل از هم آزمایش تصادفی

$$P\left\{\begin{array}{l}\text{"}k \text{ arrivals occur in an} \\ \text{interval of duration } \Delta\text{"}\end{array}\right\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\lambda = np = \mu T \cdot \frac{\Delta}{T} = \mu\Delta$$

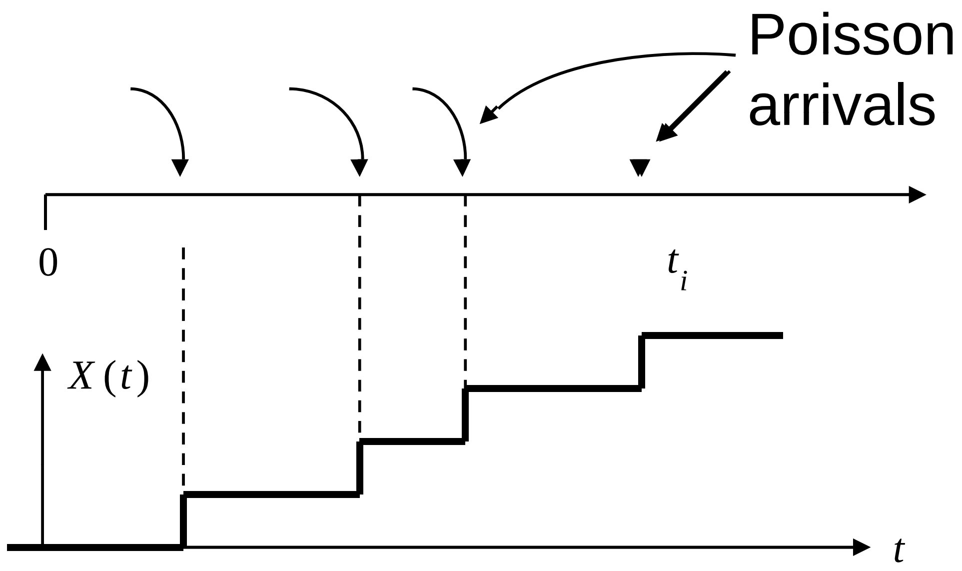




$$P\left\{\begin{array}{l}\text{"}k \text{ arrivals occur in an} \\ \text{interval of duration } 2\Delta\text{"}\end{array}\right\} = e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^k}{k!}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,$$

فرآیند پوآسن

- فرآیندی است که در جریان تکرار مستقل از هم یک آزمایش تصادفی که از لحظه t0 آغاز شده است و با هر رخداد پیشامد مد نظر نمو ثابتی پیدا می کند.
  - *اگر نمو را یک واحد در نظر بگیریم فرآیند همان فرآیند شمارش تعداد رخداد هاست.*
  - *لحظات رخداد پیشامدها را نقاط پوآسن گویند.*



فرآیند پوآسن

- تعداد رخداد پیشامد در فاصله t تا s $\quad X(s)-X(t) \sim P(a_{t,s})$
- یک فرآیند با نمو مستقل است: $X(t_1) \perp\!\!\!\perp \mathrm{X}(\mathrm{t}_2)-X(t_1) \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp \mathrm{X}(\mathrm{t}_n)-X(t_{n-1})$
- نمو فواصل بزرگ را می توان مجموع نمو فواصل کوچک در نظر گرفت:

$$a_{t,s} = \int_t^s \lambda dt = \lambda |s-t|$$

- با توجه به نمو مستقل بودن فرآیند، توصیف آماری مرتبه اول خود فرآیند و نمو فرآیند توصیف آماری کامل از فرایند را نتیجه می دهند:

$$P(X(t)=i) = e^{-a_{0,t}} \frac{a_{0,t}^{i}}{i!}$$

$$P(X(s)-X(t)=i) = e^{-a_{t,s}} \frac{a_{t,s}^{i}}{i!}$$

$$P_X(\mathbf{i};\mathbf{t}) = e^{-a_{0,t}} \frac{a_{0,t}^{i_1}}{i_1!} \prod_{k=2}^{n} e^{-a_{t_{k-1},t_k}} \frac{a_{t_{k-1},t_k}^{(i_k-i_{k-1})}}{(i_k-i_{k-1})!}$$

فرآیند پوآسن

- ممان های فرآیند پوآسن
  - ➢ *ممان اول*

$$E[X(t)] = a_{0,t} = \lambda t$$

  - ➢ *ممان دوم مرکزی (بدلیل بانمو مستقل بودن)*

$$C_X(t,s) = \begin{cases} \sigma^2_{X(t)} = a_{0,t} & t < s \\ \sigma^2_{X(s)} = a_{0,s} & s \le t \end{cases} = \begin{cases} \lambda t & t < s \\ \lambda s & s \le t \end{cases} = \lambda \min(t,s)$$

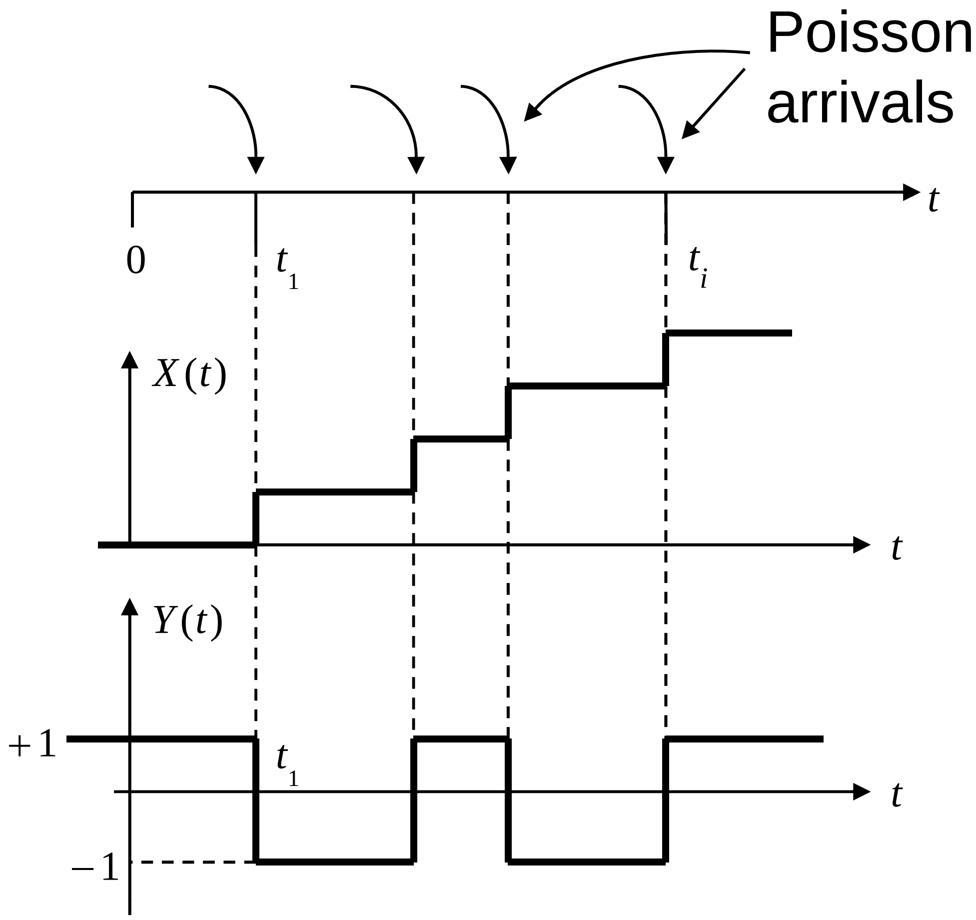
- توصیف آماری نقاط پوآسن را ارلانگ گوییم :
  - ➢ *زمان انتظار برای **i**امین رخداد پیشامد:*

$$T_i \sim \mathrm{E}(\mathrm{i},\lambda)$$

فرآیند سیگنال تلگرافی

- فرآیندی که از لحظه منهای بی نهایت شروع شده با مقدار اولیه 1+یا 1- و با هر رخداد پیشامد علامت آن تغییر می کند.

$$Y(t) = (-1)^{X(t)}$$



فرآیند سیگنال تلگرافی

- یک فرآیند با نمو مستقل نیست.
- یک فرآیند مارکف است.

$$P_X(\mathbf{i};\mathbf{t})=(\frac{1}{2})^n\prod_{k=2}^{n}(1+i_{k-1}i_k e^{-2\lambda(t_k-t_{k-1})})$$

- ممان ها
  - ➢ ممان مرتبه اول
  - ➢ ممان مرتبه دوم

$$m_X(t)=(1)0.5+(-1)0.5=0$$

$$C_X(t,s)=R_X(t,s)=e^{-2a_{t,s}}=e^{-2\lambda|s-t|}=e^{-2\lambda|\tau|}$$

فرآیند نرمال

- هر ترکیب خطی دلخواه از متغیر های تصادفی آن تولید یک متغیر تصادفی کند:

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha) X(\alpha) d\alpha \sim N(m_Z, \sigma_Z^2)$$

- هر فرآیند دیگر به صورت ترکیب خطی متغیر بازمان فرآیند، یک فرآیند نرمال است.

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha, t) X(\alpha) d\alpha$$

- هر بردار تصادفی یک فرآیند نرمال، یک بردار نرمال است.در نتیجه توصیف آماری مرتبه nام فرآیند به صورت زیر است:

$$f_X(\mathbf{x};\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |C_X|}} e^{-\frac{1}{2} q_{C_X^{-1}}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x)}$$

ادامه

- با توجه به نکته قبل، ممان اول و دوم فرآیند توصیف کامل آماری فرآیند نرمال است.
- با توجه به نکته بالا از WSS بودن فرآیند می توان SSS بودن کامل فرآیند را نتیجه گرفت.

فرآیند سفید

$$\begin{cases} m_X(t) = 0 \\ R_X(t+\tau,t) = C_X(t+\tau,t) = g(t)\delta(\tau) \end{cases}$$

- فرایندی با ممان های
- همه متغیرهای تصادفی فرآیند سفید با یکدیگر متعامد و ناهمبسته هستند.
- اگر فرآیند سفید نرمال هم باشد، همه متغیر های فرآیند مستقل هم خواهند بود.(فرآیند نویز سفید)
- اگر $g(t) = N_0$ فرایند را نویز سفید ساکن گوییم.
- اگر $N_0 = 1$ فرایند نویز سفید نرمالیزه خواهد بود.
- توزیع توان بین مولفه های فرکانسی نویز سفید یکنواخت است.

فرایند وینر

- فرایندی است (X) با فضای پارامتر $T \in [0,\infty)$ که آن را به صورت انتگرال یک نویز سفید ساکن نرمال (W) تعریف می کنند.

$$W(t) \sim N(0, N_0\delta(t-s))$$

$$X(t) \triangleq \int_0^t W(\alpha)d\alpha$$

- فرآیند وینر یک فرایند نرمال است.(ترکیب خطی متغیر بازمان یک فرآیند نرمال)
- بدلیل نرمال بودن، ممان های اول و دوم فرایند توصیف آماری کامل فرآیند هستند.

$$X(t) \sim N(0, N_0 min(t,s))$$

- فرآیند وینر، یک فرآیند با نمو مستقل، مارکوف و مارتینگل است.

محاسبه ممان های فرآیند وینر

$$m_X(t) = E[X(t)] = E\int_0^t W(\alpha)d\alpha = \int_0^t E[W(\alpha)]d\alpha = 0$$

$$C_X(t,s) = R_X(t,s) = E\int_0^t W(\alpha)d\alpha \int_0^s W(\beta)d\beta = \int_0^t\int_0^s E[W(\alpha)W(\beta)]d\alpha d\beta$$

$$= \int_0^t\int_0^s N_0\delta(\alpha-\beta)d\alpha d\beta$$

$$= N_0\int_0^s U(\alpha-\beta)\Big|_0^t d\beta$$

$$= N_0\int_0^s U(t-\beta) - U(-\beta)d\beta \overset{s>0}{=} N_0\int_0^s U(t-\beta)d\beta$$

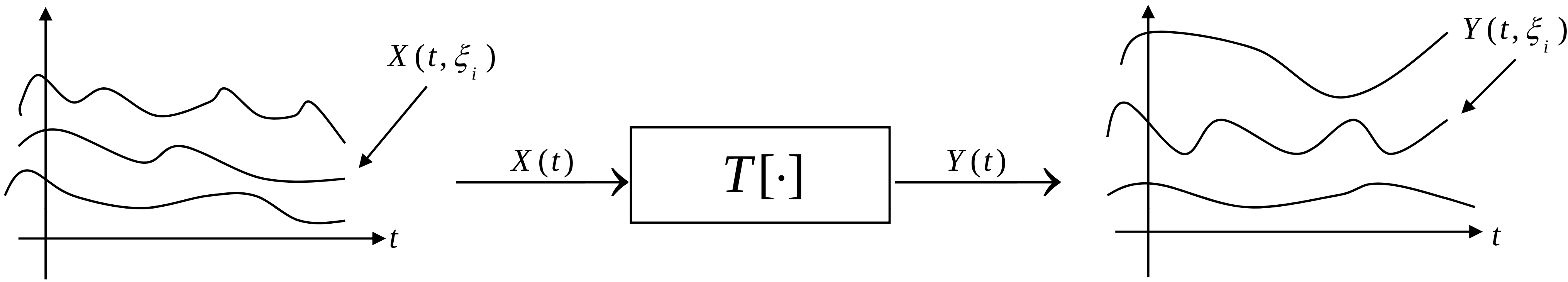
$$= N_0[-r(t-\beta)\Big|_0^s = N_0[r(t)-r(t-s)]$$

$$= N_0[t-r(t-s)] = N_0\begin{cases} t-0 & t<s \\ t-(t-s) & s<t \end{cases} = N_0 \min(t,s)$$

۶- عبور فرآیند از یک سیستم خطی

سیستم با ورودی تصادفی

$$Y(t,\xi_i) = T[X(t,\xi_i)]$$



Deterministic Systems

Memoryless Systems

$$Y(t) = g[X(t)]$$

Systems with Memory

Time-varying systems

Time-Invariant systems

Linear systems

$$Y(t) = L[X(t)]$$

Linear-Time Invariant (LTI) systems

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) X(\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X(t-\tau) d\tau.$$

LTI system

سیستم LTI

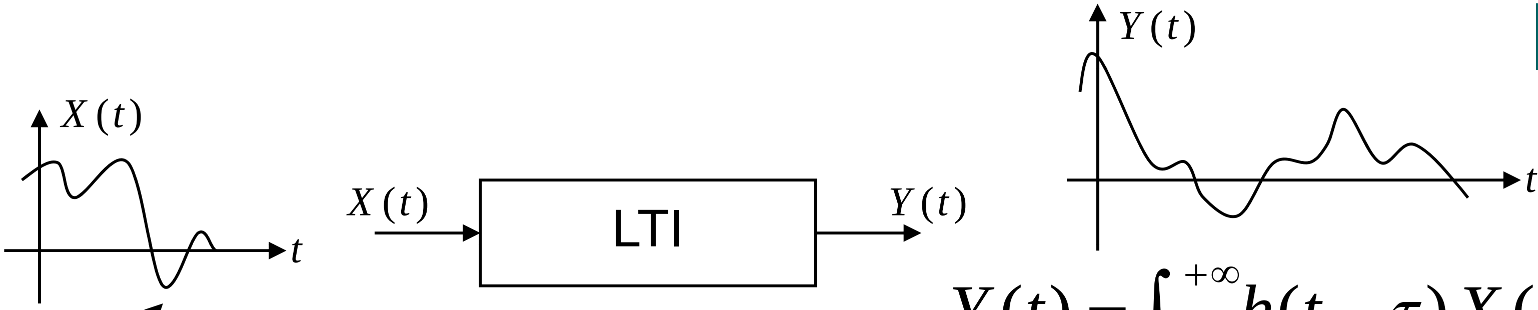


Fig. 14.6

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)X(\tau)d\tau$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$$

$$X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$Y(t)=L\{X(t)\}.$$

$$Y(t)=L\{X(t)\}=L\{\int_{-\infty}^{+\infty}X(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}L\{X(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\}$$ By Linearity

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\tau)L\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

By Time-invariance

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau. \quad (14\text{-}33)$$

آمارگان خروجی

$$m_Y(t) = E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{X(\tau)h(t-\tau)d\tau\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} m_X(\tau)h(t-\tau)d\tau = m_X(t) * h(t)$$

$$R_{XY}(t,s) = E\{X(t)Y^*(s)\}$$

$$= E\{X(t)\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(s-\alpha)h^*(\alpha)d\alpha\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E\{X(t)X^*(s-\alpha)\}h^*(\alpha)d\alpha$$

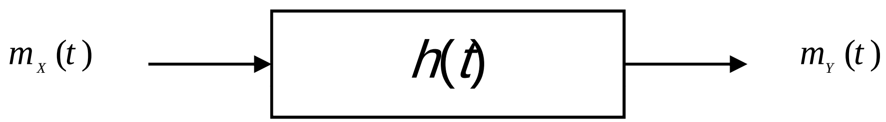
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(t,s-\alpha)h^*(\alpha)d\alpha$$

$$= R_X(t,s) * h^*(s).$$

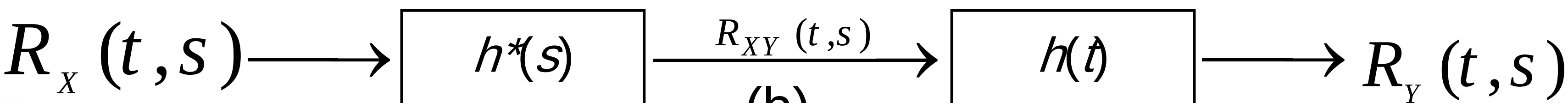
آمارگان خروجی

$$R_Y(t,s) = E\{Y(t)Y^*(s)\}$$
$$= E\{\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-\beta)h(\beta)d\beta \; Y^*(s)\}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E\{X(t-\beta)Y^*(s)\}h(\beta)d\beta$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t-\beta,s)h(\beta)d\beta$$
$$= R_{XY}(t,s) * h(t),$$

$$R_Y(t,s) = R_X(t,s) * h^*(s) * h(t).$$



(a)



(b)

خروجی به ازاء ورودی WSS

$$WSS: \begin{cases} m_X(t) = m_X \\ R_X(t,s) = R_X(t-s) = R_X(\tau) \end{cases}$$

$$m_Y(t) = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau = m_X c,$$

$$R_{XY}(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t-s+\alpha)h^*(\alpha)d\alpha$$

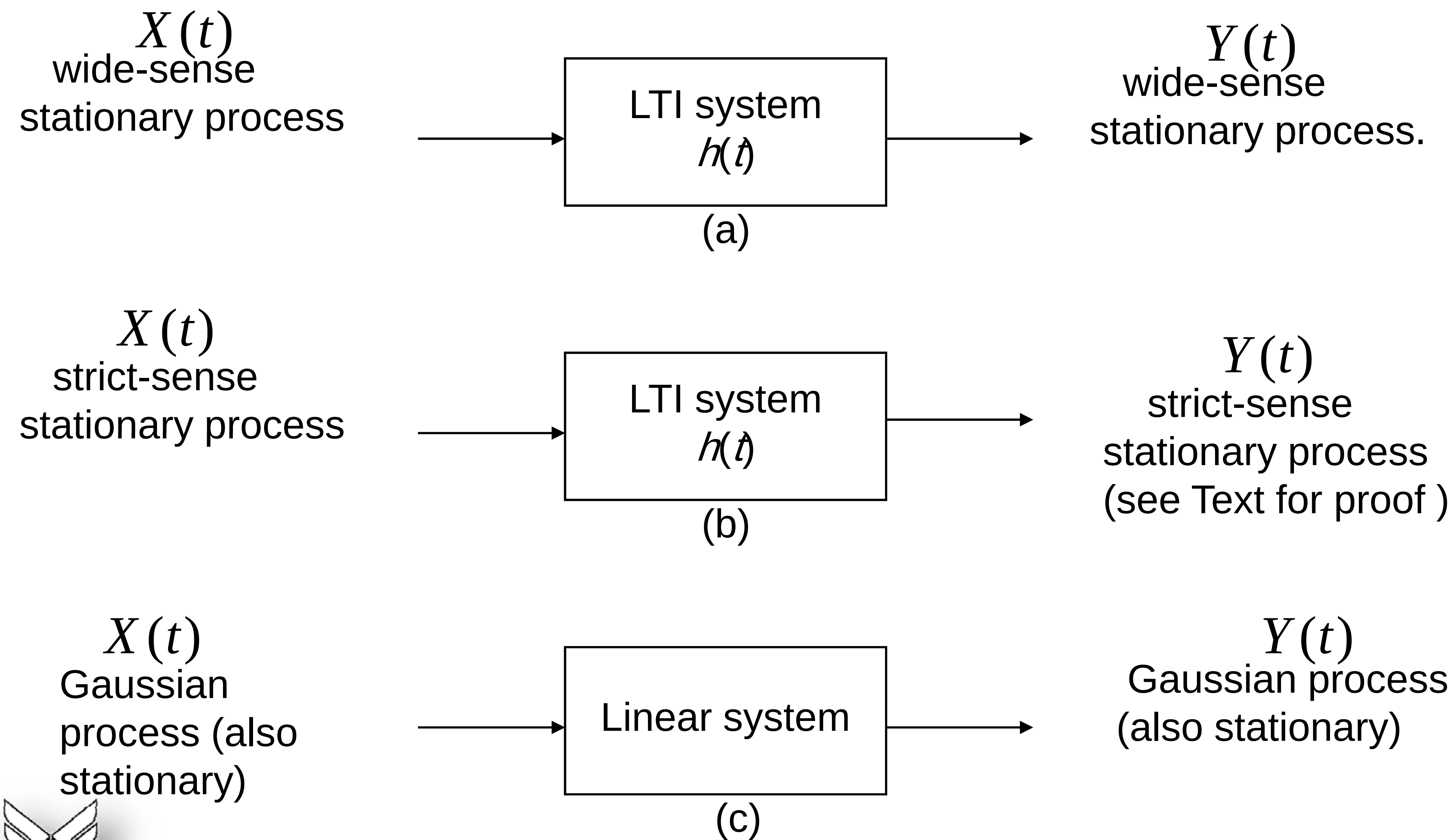
$$= R_X(\tau) * h^*(-\tau) = R_{XY}(\tau), \quad \tau = t-s.$$

$$R_Y(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t-\beta-s)h(\beta)d\beta, \quad \tau = t-s$$

$$= R_{XY}(\tau) * h(\tau) = R_Y(\tau).$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau).$$

ورودی ساکن


$X(t)$
wide-sense stationary process
LTI system
$h(t)$
(a)
$Y(t)$
wide-sense stationary process.
$X(t)$
strict-sense stationary process
LTI system
$h(t)$
(b)
$Y(t)$
strict-sense stationary process (see Text for proof)
$X(t)$
Gaussian process (also stationary)
Linear system
(c)
$Y(t)$
Gaussian process (also stationary)

مثال

- ممان های خروجی سیستم مشتق گیر را به دست آورید؟

فرآیند ارگادیک (Ergodic)

- تعریف متوسط زمانی: معرف مقادیری که تابع X در طول محور زمان اختیار می کند. برای سیگنال های متناوب کافی است در طول یک دوره انتگرال گیری شود.

$$< x(t) >= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

- ارگادیک بودن: داشتن خاصیتی که بتوان از توابع زمانی فرآیند تصادفی،خصوصیات آماری فرآیند را استخراج کرد.(به طور مثال: از متوسط گیری زمانی به جای متوسط گیریی آماری استفاده کنیم)

شرایط ارگادیک بودن

- وجود شباهت هایی بین توابع زمانی فرآیند
  - *زیرا لازم است فرقی نکند از کدامیک برای استخراج خصوصیات آماری استفاده می‌شود.*
- ساکن بودن فرآیند در آن خصوصیتی که ارگادیک است.
  - *زیرا با متوسط گیری زمانی، حاصل تابعی از زمان نخواهد بود.*

- اهمیت ارگادیک بودن
  - *با یک آزمایش تصادفی(به دست آوردن یک تابع زمانی فرآیند) می توان خصوصیات آماری فرآیند را به دست آورد.*
  - *یک نتیجه گیری آماری را می توان به تک تک موارد تعمیم داد.*

Mean Ergodicity(ME) ارگادیک بودن در متوسط

- تابع متوسط فرآیند را از هریک از توابع زمانی فرآیند می توان به دست آورد.

$$m_X(t) = E[X(t)] = \langle X(t,\xi) \rangle_t$$

- سمت راست مستقل از t می شود لذا سمت چپ نیز باید مستقل شود.

➢ *ساکن بودن در متوسط* $m_X(t) = m_X$

➢ *سمت راست تابعی از ξ یعنی متغیر تصادفی می شود. درحالیکه سمت چپ تصادفی نیست.پس لازم است که*

$$\langle X(t,\xi) \rangle_t = m_X$$

از نظر عملی تساوی به مفهوم ms کافی است:

$$E[|\langle X(t,\xi) \rangle - m_X|^2] = 0$$

قضیه ۱:

- قضیه : شرط کافی و لازم برای ME بودن
- اثبات شرط دوم:

$$\begin{cases} m_X(t) = m_X \\ \langle\langle C_X(t,s) \rangle_t \rangle_s = 0 \end{cases}$$

$$E[|\langle X(t,\xi)\rangle - m_X|^2] = E[(\langle X(t)\rangle_t - m_X)(\langle X(t)\rangle_t - m_X)^*]$$

$$\langle X(t)\rangle_t = \langle \tilde{X}(t) + m_X \rangle_t = \langle \tilde{X}(t)\rangle_t + m_X$$

$$E[|\langle X(t,\xi)\rangle - m_X|^2] = E[\langle \tilde{X}(t)\rangle_t \langle \tilde{X}^*(t)\rangle_t] \langle x(t)\rangle$$

$$= E[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{X}(t)dt \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \tilde{X}^*(t)dt]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \underbrace{E[\tilde{X}(t)\tilde{X}^*(s)]}_{C_X(t,s)} dtds = \langle\langle C_X(t,s)\rangle_t\rangle_s = 0$$

قضیه ۲:

- شرط لازم و کافی برای ME بودن فرآیند WSS عبارت است از:

$$<C_X(\tau)>_\tau = 0$$

- اثبات : برای فرآیند WSS شرط اول قضیه ۱ برقرار است اما شرط دوم قضیه ۱:

$$<[<C_X(t,s)>_t]>_s \overset{t \to t+s}{=} <<\underbrace{C_X(t+s,s)}_{C_X(t)}>_t>_s = <<C_X(t)>_s>_t = <C_X(t)>_t = 0$$

قضیه ۳:

- شرط کافی برای ME بودن فرآیند های WSS عبارتست از:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_X(\tau) d\tau \neq \infty$$

قضیه ۴:

- شرط کافی برای ME بودن فرآیند های WSS عبارتست از:

$$\begin{cases} C_X(0) \neq \infty \\ C_X(\infty) = 0 \end{cases}$$

مثال

- فرآیند پوآسن با چگالی یکنواخت $m_X(t)=\lambda t$ ؟
- فرآیند سیگنال تلگرافی با λ یکنواخت؟
- فرآیندبا توصیف تحلیلی زیر

$$X(t)=A\cos(2\pi f_0 t+B)$$
$$A \perp\!\!\!\perp B$$
$$B \sim U(0,2\pi)$$

ارگادیک بودن در تابع همبستگی
Correlation Ergodicity(CE)

- تابع همبستگی فرآیند را به کمک هر یک از توابع زمانی فرآیند به دست آورد.یعنی:

$$R_X(t+\tau,t) = E[\underbrace{X(t+\tau)X^*(t)}_{Z_\tau(t)}] = \langle X(t+\tau)X^*(t)\rangle_t$$

- با تعریف فرآیند کمکی z می توان CE بودن X را به ME بودن Z تبدیل کرد.

قضیه

- شرط لازم و کافی برای CE بودن فرآیند X عبارتست از:

$$\begin{cases} R_X(t+\tau,t) = R_X(\tau) \\ << E[X(t+\tau,t)X^*(t)X^*(s+\tau)X(s)]>_t>_s = |R_X(\tau)|^2 \end{cases}$$

- اثبات: شرط اول همان ساکن بودن میانگین فرایند Z (Rx) است. اما شرط دوم :

$$<<C_{Z_\tau}(t,s)>_t>_s=0$$

$$C_{Z_\tau}(t,s)=E[Z_\tau(t)Z_\tau^*(s)]-\underbrace{m_{Z_\tau}(t)}_{E[X(t+\tau)X^*(t)]}\; m_{Z_\tau}^*(s)$$

$$<<C_{Z_\tau}(t,s)>_t>_s=<<E[X(t+\tau,t)X^*(t)X^*(s+\tau)X(s)]-\underbrace{R_X(t+\tau,t)}_{R_X(\tau)}\underbrace{R_X^*(s+\tau,s)}_{R_X^*(\tau)}>_t>_s=0$$

$$\Rightarrow<<E[X(t+\tau,t)X^*(t)X^*(s+\tau)X(s)]>_t>_s=<<|R_X(\tau)|^2>_t>_s=|R_X(\tau)|^2$$